মাধ্যমিক গণিত

১ম ও ২য় খণ্ড

ঘোষ • রায় • রায়

পশ্চিম বঙ্গ মধ্য শিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক ১৯৭৪ সাল শিক্ষা বৎসর হইতে
প্রবর্তিত নূতন সিলেবাস অনুযায়ী নবম শ্রেণীর
ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য রচিত।

মাধ্যমিক গণিত

প্রথম ও দ্বিতীয় খণ্ড

[বীজগণিত, পাটীগণিত, জ্যামিতি ও পরিমিতি]

নবম শ্রেণী

অধ্যাপক হরিহর ঘোষ
অধ্যাপক সুকুমার রায়
অধ্যাপক সুনির্মল রায়
গণিত বিভাগ, বেঙ্গল ইঞ্জিনীয়ারিং কলেজ, শিবপুর

নয়া প্রকাশ
২০৬ বিধান সরণী, কলিকাতা ৬

প্রকাশক ঃ

বারীন্দ্র মিত্র

নয়া প্রকাশ

২০৬ বিধান সরণী

কলিকাতা ৬

প্রথম প্রকাশ ঃ ডিসেম্বর ১৯৭৩

মূল্য ঃ ছয় টাকা পঁচাত্তর পয়সা

মুদ্রক ঃ

নয়া মুদ্রণ

১৬/৩ সি ডিক্সন লেন

কলিকাতা ১৪

সূচীপত্র

জ্যামিতি

পরিমিতি

Syllabus of Mathematics—Class IX

Part I

Algebra and Arithmetic — $30+15=45$ marks.

Algebra — (30 marks)

1. Revision of previous work.
2. Harder problems leading to equations—simple and simultaneous.
3. Graphs of simple equation—Application.

Arithmetic — (15 marks)

Ratio-Proportion and Percentage. Problems may be solved Algebrically.

Part II

Geometry and Mensuration— $40+15=55$ marks.

Geometry— (40 marks)

1. To establish the following properties :
   (*a*) The opposite sides and angles of a parallellogram are congruent. Each diagonal divides the parallelogram into congruent triangles and diagonals bisect each other.

   (*b*) A quadrilateral is a parallelogram if
   (*i*) both pairs of opposite sides are congruent,
   or
   (*ii*) both pairs of opposite angles are congruent,
   or
   (*iii*) one pair of opposite sides is congruent and parallel,
   or
   (*iv*) its diagonals bisect each other

   (*c*) If there are three or more parallel lines and the intercepts made by them on any one line that cuts them are congruent then the corresponding intercepts on any other line that cuts them are also congruent.

   (*d*) The line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side. The line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and equal to half of it.

(*e*) The formal proof should be produced by activities such as paper folding, paper cutting in all the cases of this paragraph.

(*i*) Parallelogram on the same base and between the same parallels (or, of the same altitude) are equal in area.

(*ii*) Triangles on the same base (or, on equal bases) and between the same parallels (or, of the same altitude) are equal in area.

(*iii*) Equal (in area) triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels.

(*iv*) If a triangle and a parallellogram stand on the same base and between the same parallels, the area of the triangle is half that of the parallelogram.

(*f*) (*i*) The perpendiculars drawn to the sides of a triangle from their middle points are concurrent

(*ii*) The bisectors of the angle of a triangle are concurrent.

(*iii*) The medians of a triangle are concurrent.

2. Pythagoras' Theorem—Dissection method (No formal proof).

3. Constructions :

(*i*) Construction of a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles congruent to a given angle.

(*ii*) Construction of a triangle equal in arca to a given rectilineal figure.

Mensuration (15 *marks*)

Perimeter and Area of a Rectangle, Square, Triangle ; Circumference and Area of a Circle.

বীজগণিত

(নবম শ্রেণী)

প্রথম অধ্যায়

পূর্ব পাঠের পুনরালোচনা

§1·1. 1, 2, 3···এই সংখ্যাগুলি আমাদের কাছে অতি পরিচিত। এই সংখ্যাগুলিকে আমরা স্বাভাবিক সংখ্যা (natural numbers) বলে থাকি।

§1·2. আমরা প্রায়ই লাভ-ক্ষতি, আয়-ব্যয়, জমা-খরচ, উত্থান-পতন এই জাতীয় দুই বিপরীত অর্থবোধক শব্দ ব্যবহার করে থাকি।

মনে করা যাক্ কোন লোক 100 টাকা লাভ করল। তাহলে আমরা বলতে পারি লোকটি +100 টাকা লাভ করে। আবার যদি মনে করা যায় লোকটি 50 টাকা ক্ষতি করে তাহলে বীজগণিতের ভাষায় আমরা বলতে পারি লোকটি −50 টাকা লাভ করল। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে কোন সংখ্যার আগে যোগ চিহ্ন (+) অথবা বিয়োগ চিহ্ন (−) দিলে সংখ্যাটির মান বা অর্থ বদলে যায়। কোন সংখ্যার আগে বিয়োগ চিহ্ন না থাকলে ধরে নেওয়া হয় যে সেই সংখ্যাটির আগে যোগ চিহ্ন আছে। আমরা 1, 2, 3, 4··· ও −1, −2, −3,···এই দুই রকমের সংখ্যার সংগে অতি পরিচিত। 1, 2, 3, 4···এই সংখ্যাগুলিকে ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলে এবং −1, −2, −3··· এই সংখ্যাগুলিকে ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলে। এ ছাড়াও আমরা আরও কিছু সংখ্যার সংগে পরিচিত। যেমন $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{8}$, ···। এ রকম সংখ্যাকে ধণাত্মক ভগ্নাংশ বলে। আবার $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{7}{9}$, ···এই জাতীয় সংখ্যাকে ঋণাত্মক ভগ্নাংশ বলে থাকি। বীজগণিতে $a, b, c, \cdots x, y, z \cdots s, t, u,$ ইত্যাদি প্রতীক দিয়ে যে কোনও সংখ্যা বুঝান হয়।

§1·3. মূলদ সংখ্যা **(rational number)** ঃ যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ এই আকারে লেখা যায় তাকেই আমরা মূলদ সংখ্যা বলব। এখানে p ও q

উভয়েই অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$, (0 র সমান নয় $\neq$ এই চিহ্ন দিয়ে বোঝান হয়)। যেমন $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{6}{13}, 5, \cdots -\frac{3}{5}, \cdots$ ইত্যাদি মূলদ সংখ্যা।

§1·4. অমূলদ সংখ্যা (irrational numbers) ঃ উপরে যে সংখ্যা-গুলির আলোচনা করা গেল সেইগুলি ছাড়া আরও কিছু সংখ্যা আছে। এই সংখ্যাগুলিকে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায় না। এই সংখ্যাগুলিকে অমূলদ সংখ্যা বলে।

বীজগণিতের প্রাথমিক নিয়মাবলী (Fundamental laws in Algebra)

§1·5. যোগ ঃ দুটি ভিন্ন রাশির, যেমন $3x$ কি. গ্রা. ও $4y$ কি. গ্রা. এর যোগফলকে বীজগণিতের নিয়মে $3x$ কি. গ্রা. $+4y$ কি. গ্রা. এইভাবে লেখা হয়। ঠিক সেইভাবে $2x, -4y, 5z$ এর যোগফল হ'বে $2x-4y+5z$।

§1·6. যোগের বিনিময় ও সংযোগ নিয়ম (Commutative and associative laws of addition)

যোগের অন্তর্গত সমস্ত রাশিকে যেভাবে ইচ্ছা সেইভাবেই দলবদ্ধ করে সাজান যায়। যেমন

(*i*) $a+b=b+a$ (বিনিময় নিয়ম)

(*ii*) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (সংযোগ নিয়ম)

§1·7. সদৃশ ও অসদৃশ রাশি ঃ $-3a, -5a, 7a, 4a \cdots$ ইত্যাদি রাশি একই রকমের। এই জাতীয় রাশিকে সদৃশ রাশি বলে। আবার $-4a, 5b, 9c$ ইত্যাদি রাশিগুলি বিভিন্ন রকমের। এদের অসদৃশ রাশি বলে। উদাহরণ—$a^2, 5a^2, -7a^2, \cdots$ সদৃশ কিন্তু a^2, ab, b^2 অসদৃশ।

§1·8. সদৃশ ও অসদৃশ রাশিমালার মিশ্রণের যোগফল ঃ

কোনও একটি যোগের অঙ্কে যে সমস্ত পদ (term) আছে সেই পদগুলিকে পৃথক পৃথক দলে এমনভাবে সাজাতে হবে যে প্রত্যেক দলের পদগুলি পরস্পর সদৃশ হয়। এর পরের ধাপে সদৃশ পদগুলির যোগফল বের করলেই সমস্ত অঙ্কটির যোগফল পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 1. যোগ কর ঃ

$$x^2+yz+3y^2-6zx, \quad 2z^2-4yz+8zx, \quad 3yz+x^2-y^2-2zx$$

যোগফল $=x^2+yz+3y^2-6zx+2z^2-4yz+8zx+3yz$
$+x^2-y^2-2zx$

$$=\underline{x^2+x^2}+\underline{yz-4yz+3yz}+\underline{3y^2-y^2}+2z^2\underline{-6zx+8zx-2zx}$$

$$=2x^2+2y^2+2z^2$$

(উপরের প্রক্রিয়ায় সদৃশ রাশিগুলির নীচে দাগ দিয়ে বিভিন্ন দলে ভাগ করে দেখান হয়েছে)

বিকল্প প্রক্রিয়া—

$$\begin{array}{llll} x^2+ & yz+3y^2 & -6zx & \\ & -4yz & +8zx & +2z^2 \\ x^2+ & 3yz-\ y^2 & -2zx & \\ \hline 2x^2 & +2y^2 & & +2z^2 \end{array}$$

উত্তর $2x^2+2y^2+2z^2$

§1·9. বন্ধনীর ব্যবহার (Use of brackets) ঃ

(1) কোনও বন্ধনীর পূর্বে (+) চিহ্ন থাকলে ঐ বন্ধনীর অপসারণের সময় বন্ধনীর ভিতরের কোন পদের চিহ্নের কোনও পরিবর্তন হবে না।

যেমন, $x+(y-z+t)=x+y-z+t$

এবং $(a+b-c)+(-f-g+k+l)=a+b-c-f-g+k+l$

(2) কোনও বন্ধনীর পূর্বে (−) চিহ্ন থাকলে ঐ বন্ধনীর অপসারণের সময় সমস্ত পদের চিহ্ন পরিবর্তন করতে হবে। অর্থাৎ (+) চিহ্নের জায়গায় (−) চিহ্ন এবং (−) চিহ্নের জায়গায় (+) চিহ্ন লিখতে হবে।

যেমন, $x-(y-z+t)=x-y+z-t$

এবং $(a+b-c)-(-f-g+k+l)=a+b-c+f+g-k-l$

(3) আবার কতকগুলি পদকে পূর্বে (+) চিহ্ন দিয়ে একটি বন্ধনীর মধ্যে রাখতে হ'লে ঐ পদগুলির চিহ্নের কোনও পরিবর্তন হবে না। কিন্তু যদি পূর্বে (−) চিহ্ন দিয়ে একটি বন্ধনীর মধ্যে রাখা হয় তবে সমস্ত পদেরই চিহ্নের পরিবর্ত্তন করতে হবে।

যেমন, $x-y+z-t+s-p+q+r=x-(y-z+t)+(s-p+q+r)$

(4) অনেক সময় একাধিক বন্ধনীর ব্যবহার করা হয়। যেমন,

$$x-[y+\{z-p-(q+r-\overline{u-v})\}].$$

একাধিক বন্ধনীর প্রয়োগ থাকলে সেগুলি অপসারণের সময় সকলের আগে ভিতরের বন্ধনীটি, তারপরে তার বাহিরের বন্ধনীটি, তারপরে

তারও বাইরেরটি এইভাবে একে একে বন্ধনীগুলি অপসারণ করা সুবিধাজনক। অবশ্য ইচ্ছা করলে সকলের বাইরে যে বন্ধনী আছে সেখান থেকেও বন্ধনী অপসারণের কাজ শুরু করা যায়।

উদাহরণ—সরল কর ঃ $x-[y+\{z-p-(q+r-\overline{u-v})\}]$

প্রথম প্রক্রিয়া—

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= x-[y+\{z-p-(q+r-\overline{u-v})\}]\\ &= x-[y+\{z-p-(q+r-u+v)\}]\\ &= x-[y+\{z-p-q-r+u-v\}]\\ &= x-[y+z-p-q-r+u-v]\\ &= x-y-z+p+q+r-u+v\end{aligned}$$

দ্বিতীয় প্রক্রিয়া—

$$\begin{aligned}\text{প্রদত্ত রাশিমালা} &= x-[y+\{z-p-(q+r-\overline{u-v})\}]\\ &= x-y-\{z-p-(q+r-\overline{u-v})\}\\ &= x-y-z+p+(q+r-\overline{u-v})\\ &= x-y-z+p+q+r-\overline{u-v}\\ &= x-y-z+p+q+r-u+v\end{aligned}$$

§1·10. বিয়োগ (Subtraction) ঃ

বিয়োজ্য ও বিয়োজন ঃ গণিতের একটি রাশি থেকে অপর একটি রাশি বিয়োগ করা হ'লে প্রথম রাশিটিকে বিয়োজন ও দ্বিতীয় রাশিটিকে বিয়োজ্য বলে। বীজগণিতে বিয়োগফল বের করার জন্য বিয়োজ্য রাশির সমস্ত পদের চিহ্ন পরিবর্তন করে বিয়োজনের সঙ্গে যোগ করতে হয়।

বন্ধনীর সাহায্যে বিয়োগফল নির্ণয় ঃ

বিয়োগফল=(বিয়োজন রাশির সমস্ত পদ) −

(বিয়োজ্য রাশির সমস্ত পদ)

উদাহরণ ঃ

$3a^3+4ab+b^3$ থেকে $4a^3-6ab+b^2-2b^3$ বিয়োগ কর।

বিয়োগফল ঃ

$$\begin{aligned}&=(3a^3+4ab+b^3)-(4a^3-6ab+b^2-2b^3)\\ &=3a^3+4ab+b^3-4a^3+6ab-b^2+2b^3\\ &=3a^3-4a^3+4ab+6ab-b^2+b^3+2b^3\\ &=-a^3+10ab-b^2+3b^3\end{aligned}$$

বন্ধনীর সাহায্যে এই বিয়োগফল বের করা গেল। এখন আমরা চিহ্ন পরিবর্তন করে এই বিয়োগফল বের করব।

$$\begin{array}{l} 3a^3+4ab+\ \ b^3 \\ 4a^3-6ab-2b^3+b^2 \\ -\quad\ +\quad\ +\quad\ - \quad \text{(চিহ্ন পরিবর্তন করে)} \\ \hline -a^3+10ab+3b^3-b^2 \quad \text{(বিয়োগফল)} \end{array}$$

§1·11. গুণ (multiplication) ও ভাগ (division)

গুণ ও ভাগ কি করে করতে হয় সে সম্বন্ধে সকল ছাত্র পূর্বেই শিখেছে। তাই এখানে কয়েকটি নিয়ম আলোচনা করা হচ্ছে মাত্র।

বীজগণিতে গুণ ও ভাগের জন্য কয়েকটি নিয়ম জেনে রাখা খুবই দরকার। যেমন

(1) **গুণের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম (Rules of signs in multiplication) ঃ**

$$(+x)\times(+y)=+xy \qquad (+x)\times(-y)=-xy$$
$$(-x)\times(+y)=-xy \qquad (-x)\times(-y)=+xy$$

(2) **গুণের বিনিময় নিয়ম (Commutative law of multiplication) ঃ**
$m\times n=n\times m$

(3) **ভাগের চিহ্ন বিষয়ক নিয়ম (Rules of signs in division) ঃ**

$$(+a)\div(+b)=+\frac{a}{b}\ * \qquad (+a)\div(-b)=-\frac{a}{b}$$
$$(-a)\div(+b)=-\frac{a}{b} \qquad (-a)\div(-b)=+\frac{a}{b}$$

(4) **গুণের সংযোগ নিয়ম (Associative law of multiplication) ঃ**

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

(5) **গুণ ও ভাগের বিচ্ছেদ নিয়ম (Distributive laws of multiplication and division) ঃ**

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$
$$(a+b)\div c=(a\div c)+(b\div c)$$

(6) **সূচক নিয়ম (Laws of indices) ঃ**

$$a^x\times a^y=a^{x+y}, \qquad a^x\div a^y=a^{x-y}, \qquad (a^m)^n=a^{m\cdot n}$$

---

* ভাগের সময় 'a' কে 'b' দিয়ে সব সময় ভাগ করতে পারা যায় না। কেবলমাত্র $b\neq0$ হলেই ভাগ করা যায়। বস্তুত পক্ষে, $b=0$ হ'লে $a\div b$ প্রতীকটি অর্থহীন।

উদাহরণ. 1. x^2+xy+y^2 কে $x-y$ দিয়ে গুণ কর।

$$\begin{array}{l} x^2+xy+y^2 \\ x-y \\ \hline x^3+x^2y+xy^2 \\ \quad\ -x^2y-xy^2-y^3 \\ \hline x^3 \qquad\qquad\quad -y^3 \end{array}$$

নির্ণেয় গুণফল $=x^3-y^3$ (উত্তর)

উদাহরণ. 2. x^2-x+1, x^2+x+1, ও x^4-x^2+1 এর ক্রমিক গুণফল বের কর।

[দুই এর অধিক রাশিকে একদিক থেকে পরপর গুণ করলে যে গুণফল পাওয়া যায় তাকে ঐ রাশিগুলির ক্রমিক গুণফল (continued product) বলে।]

$$\begin{array}{l} x^2-x+1 \\ x^2+x+1 \\ \hline x^4-x^3+x^2 \\ \quad\ x^3-x^2+x \\ \qquad\quad x^2-x+1 \\ \hline x^4 \quad +x^2 \quad +1 \quad (\text{প্রথম দুটির গুণফল}) \\ x^4 \quad -x^2 \quad +1 \\ \hline x^8 \quad +x^6 \quad +x^4 \\ \qquad -x^6 \quad -x^4-x^2 \\ \qquad\qquad\quad x^4+x^2+1 \\ \hline x^8 \qquad\quad +x^4 \quad\ +1 \quad (\text{সবকটির গুণফল}) \end{array}$$

অতএব নির্ণেয় গুণফল $=x^8+x^4+1$ (উত্তর)

উদাহরণ. 3. $x^5-9x^4a+5x^3a^2$ কে $3x^3$ দিয়ে ভাগ কর।

$$\text{ভাগফল}=\frac{x^5-9x^4a+5x^3a^2}{3x^3}$$

$$=\frac{x^5}{3x^3}+\frac{-9x^4a}{3x^3}+\frac{5x^3a^2}{3x^3}$$

$$=\tfrac{1}{3}x^2-3xa+\tfrac{5}{3}a^2 \quad (\text{উত্তর})$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য—একটি বহুপদ রাশিকে (Polynominal) আর একটি বহুপদ রাশি দিয়ে ভাগ করবার সময় পাটীগণিতের ভাগের মতই ভাগ

করা যায়। তবে এইরূপ ভাগ আরম্ভ করবার আগে ভাজ্য ও ভাজক দুটিকেই উভয়ের অন্তর্গত সাধারণ একটি প্রতীকের ঘাতের ক্রম অনুসারে সাজাতে হবে। নীচের অঙ্কটি দেখলেই এটা স্পষ্ট বোঝা যাবে।

উদাহরণ. $x^5+2x^4+6x^3+2+x^2$ কে x^2+2+2x দিয়ে ভাগ কর। এখানে ভাজ্য ও ভাজক উভয়টিতে সাধারণ প্রতীক x সুতরাং x এর ঘাতের ক্রম অনুসারে এদের সাজিয়ে ভাগ করতে হবে।

$$
\begin{array}{l}
x^2+2x+2)\,x^5+2x^4+6x^3+x^2\quad+2(\,x^3+4x-7 \\
\qquad\qquad x^5+2x^4+2x^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 4x^3+x^2\qquad\quad+2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 4x^3+8x^2+8x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad -7x^2-8x+2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -7x^2-14x-14 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6x+16
\end{array}
$$

(উত্তর) ভাগফল $=x^3+4x-7$

ভাগশেষ $=6x+16$

§1·12. প্রশ্নমালা 1

1. যোগ কর ঃ

(*i*) $a-b+c,\ a+b-c,\ b+c-a$

(*ii*) $a+b+c,\ a-b-c,\ b-c-a,\ c-a-b$

(*iii*) $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z,\ (c-a)x+(a-b)y+(b-c)z$

(*iv*) $lx+my+nz,\ 2lx-3my+3nz$

(*v*) $5x^2-7xy+6y^2,\ 5y^2-2xy+z^2,\ 6z^2-4x^2+5yz$

2. বিয়োগ কর ঃ

(*i*) $3x+9y+7z$ থেকে $2x-10y+6z$

(*ii*) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ থেকে $3a^2b+3ab^2-a^3-b^3$

(*iii*) $(a+b)x+(b+c)y+(c+a)z$ থেকে $ax+by+cz$

(*iv*) $(m+n)x+(n+l)y+(l+m)z$ থেকে $(m+n-l)x+(n+l-m)y+(l+m-n)z$

3. গুণ কর ঃ

(i) $4x^2-6xy+9y^2$ কে $2x+3y$ দিয়ে

(ii) $3a-4b+5c$ কে $3a+4b-5c$ দিয়ে

(iii) x^2+3x+5 কে x^2-x+1 দিয়ে

4. ভাগ কর ঃ

(i) $9x^4+6x^2y^2+y^4$ কে $x^2-xy+2y^2$ দিয়ে

(ii) x^8-256 কে $x-2$ দিয়ে

5. সরল কর ঃ

(i) $2a-[b+3c-\{4a+5b-(c+2a)\}]$

(ii) $5x-[7y-\{4z+(3x-\overline{6y+7z})\}]$

সূত্রাবলী ও তাদের প্রয়োগ ঃ (Formulae and their application)

§1·13.
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab,$$
$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab,$$
$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab,$$
$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

উদাহরণ 1. $4x-5y$ ও $a+b+c$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(4x-5y)^2=(4x)^2-2.(4x).(5y)+(5y)^2$$
$$=16x^2-40xy+25y^2$$

এবং $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$
$$=(a+b)^2+2(a+b).c+c^2$$
$$=(a^2+2ab+b^2)+(2ac+2bc)+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$$

উদাহরণ 2. (a) 505 ও (b) 9998 এর বর্গ নির্ণয় কর।

(a) $505^2=(500+5)^2=500^2+2.500.5+5^2$
$$=250000+5000+25$$
$$=255025 \quad \text{(উত্তর)}$$

(b) $9998^2 = (10000-2)^2$

$= 10000^2 - 2.10000.2 + 2^2$

$= 100000000 - 40000 + 4$

$= 99960004$ (উত্তর)

উদাহরণ 3. গুণ কর :

(i) $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

(ii) 987×1013

(i) $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2) = \{(a^2+b^2)-ab\}\{(a^2+b^2)+ab\}$

$= (a^2+b^2)^2-(ab)^2 = a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$= a^4+a^2b^2+b^4$ (উত্তর)

(ii) $987 \times 1013 = (1000-13)(1000+13)$

$= 1000^2 - 13^2$

$= 1000000 - 169$

$= 999831$ (উত্তর)

উদাহরণ 4. সরল কর :

(a) $(4x-3y)^2-(3x-4y)^2$

(b) $(2x-3y+4z)^2-2(2x-3y+4z)(3x-3y+4z)$
$+(3x-3y+4z)^2$

(c) $3{\cdot}365 \times 3{\cdot}365 + 2 \times 3{\cdot}365 \times 6{\cdot}635$
$+ 6{\cdot}635 \times 6{\cdot}635$

(a) $(4x-3y)^2-(3x-4y)^2$

$4x-3y$ এর বদলে a এবং $3x-4y$ এর বদলে b বসালে প্রদত্তরাশি

$= a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

$= \{(4x-3y)+(3x-4y)\}\{(4x-3y)-(3x-4y)\}$ [মান বসালে]

$= \{7x-7y\}\{x+y\} = 7(x-y)(x+y) = 7(x^2-y^2)$

$= 7x^2-7y^2$ (উত্তর)

(b) $(2x-3y+4z)^2-2(2x-3y+4z)(3x-3y+4z)$
$+(3x-3y+4z)^2$

$2x-3y+4z$ এর জায়গায় a ও $3x-3y+4z$ এর জায়গায় b বসালে,

প্রদত্ত রাশি $= a^2 - 2ab + b^2$

$= (a-b)^2 = \{(2x-3y+4z)-(3x-3y+4z)\}^2$

[মান বসিয়ে]

$= \{2x-3y+4z-3x+3y-4z\}^2$

$= (-x)^2 = x^2$ (উত্তর)

(c) $3{\cdot}365 \times 3{\cdot}365 + 2 \times 3{\cdot}365 \times 6{\cdot}635 + 6{\cdot}635 \times 6{\cdot}635$

$= (3{\cdot}365)^2 + 2 \times (3{\cdot}365) \times (6{\cdot}635) + (6{\cdot}635)^2$

$= (3{\cdot}365 + 6{\cdot}635)^2 = (10)^2 = 100$ (উত্তর)

উদাহরণ 5. $(x+y+2z)^2 + 2(2x+5y+3z)(x+4y+z)$ কে দুটি বর্গের সমষ্টি রূপে প্রকাশ কর।

$(x+y+2z)^2 + 2(2x+5y+3z)(x+4y+z)$

মনে করা যাক্

$2x+5y+3z = a$ এবং $x+4y+z = b$

সুতরাং $a-b = x+y+2z$

প্রদত্ত রাশিমালা $= (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$

$= (2x+5y+3z)^2 + (x+4y+z)^2$ (উত্তর)

উদাহরণ 6. (i) $(x+3)(x+7)$; (ii) $(x+1)(x+2)(x+3)$ এবং (iii) 35 কে দুটি বর্গের অন্তর রূপে প্রকাশ কর।

(i) ধরা যাক্ $x+3 = a$ এবং $x+7 = b$

$$\therefore \quad (x+3)(x+7) = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x+3+x+7}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+3-x-7}{2}\right)^2$$

$$= (x+5)^2 - (-2)^2 = (x+5)^2 - (2)^2 \quad \text{(উত্তর)}$$

(ii) $(x+1)(x+2)(x+3)$

$= (x^2+3x+2)(x+3)$

ধরা যাক্ $x^2+3x+2 = a$ এবং $x+3 = b$

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত রাশিমালা} = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x^2+4x+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2+2x-1}{2}\right)^2 \quad \text{(উত্তর)}$$

(*iii*) $35=7\times5=\left(\frac{7+5}{2}\right)^2-\left(\frac{7-5}{2}\right)^2=6^2-1^2$ (উত্তর)

উদাহরণ 7. (*i*) $x+\frac{1}{x}=3$ হ'লে $x^2+\frac{1}{x^2}=$ কত ?

(*ii*) $x-y=1$ এবং $xy=12$ হ'লে $x^2+y^2=$ কত ?

(*iii*) $x-y=5$ এবং $x^2+y^2=26$ হ'লে $xy=$ কত ?

(*i*) $x^2+\frac{1}{x^2}=\underline{x^2+2.x.\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2}-2.x.\frac{1}{x}$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(3)^2-2=9-2=7$ (উত্তর)

(*ii*) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(1)^2+2.12=1+24=25$ (উত্তর)

(*iii*) $x-y=5 \quad \therefore \ (x-y)^2=5^2=25$ অর্থাৎ $x^2+y^2-2xy=25$

অতএব $26-2xy=25$ (কারণ দেওয়া আছে $x^2+y^2=26$)

অতএব $-2xy=25-26=-1 \quad \therefore \ xy=\frac{1}{2}$ (উত্তর)

§1·14. প্রশ্নমালা 2

1. নীচের রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

(*a*) $x+5y$ (*b*) x^2+3y^2 (*c*) x^2-xy+y^2 (*d*) $ax-by$
(*e*) $a-b+c-d$ (*f*) $ax-by+cz$ (*g*) 709 (*h*) 903
(*i*) 9999 (*j*) 99989.

2. সরল কর :

(*a*) $(2a-3b+4c)^2-(2a-3b-4c)^2$

(*b*) $(ax+by)^2-(ax-by)^2$

(*c*) $(ax^2+bx+c)^2-(ax^2+bx-c)^2$

(*d*) $(al+bm+cn)^2+2(al+bm+cn)(al-bm-cn)+(al-bm-cn)^2$

(*e*) $(y^2+yz+z^2)^2-2(y^2+yz+z^2)(y^2-yz+z^2)+(y^2-yz+z^2)^2$

(*f*) $(h^3+3h^2k+3hk^2+k^3)^2+2(h^3+3h^2k+3hk^2+k^3).(h^3-3h^2k+3hk^2-k^3)+(h^3-3h^2k+3hk^2-k^3)^2$

(*g*) $2{\cdot}625\times2{\cdot}625+5{\cdot}25\times2{\cdot}375+2{\cdot}375\times2{\cdot}375$

(*h*) $5{\cdot}125\times5{\cdot}125-5{\cdot}125\times9{\cdot}75+4{\cdot}875\times4{\cdot}875$

(i) $7{\cdot}376\times7{\cdot}376-2{\cdot}624\times2{\cdot}624$

(j) $3{\cdot}257\times3{\cdot}257-2{\cdot}257\times2{\cdot}257$

3. গুণ কর :

(i) $(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$

(ii) $(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2+2bc)$

(iii) $(c^2+a^2-b^2+2ca)(c^2+a^2-b^2-2ca)$

(iv) 997×1003

(v) 1992×2008

4. **দুটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর—**

(i) $(x-y)^2+2(3x-4y+5z)(2x-3y+5z)$

(ii) $(a+b)^2-2c(a+b-c)$

(iii) $4l^2-2(l+m-n)(l-m+n)$

(iv) $(4x-y+z)^2-2(2x+2y+z)(2x-3y)$

5. $37=6^2+1^2$ এই অভেদের সাহায্যে 74 কে দুটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

$$[74=2\times37=2\times(6^2+1^2)=(6+1)^2+(6-1)^2=7^2+5^2]$$

6. $169=12^2+5^2$ এই অভেদের সাহায্যে 338 কে দুটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

7. নীচের রাশিগুলিকে দুটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর

(i) $(h+3k)(3h+k)$ (ii) $(h+k)(h+2k)(h+3k)$

(iii) 63 (iv) 73 (সংকেত $73=73\times1$, ইত্যাদি)

8. (i) $h+k=4$ এবং $hk=8$ হ'লে $h^2+k^2=$ কত ?

(ii) $h-k=2$ এবং $hk=-3/2$ হ'লে $h^2+k^2=$ কত ?

(iii) $l+m=3$ এবং $l^2+m^2=5$ হ'লে $lm=$ কত ?

(iv) $l-m=1$ এবং $l^2+m^2=3$ হ'লে $lm=$ কত ?

(v) $x+\frac{1}{x}=-3$ হ'লে $x^2+\frac{1}{x^2}=$ কত ?

(vi) $y-\frac{1}{y}=2$ হ'লে $y^2+\frac{1}{y^2}=$ কত ?

(vii) $x+y=3$ এবং $xy=4$ হ'লে $x^2+y^2=$ কত ?

(viii) $x+y=2$ এবং $x^2+y^2=3$ হ'লে $xy=$ কত ?

9. $x=\sqrt{2}-3$ হ'লে $2x^2+12x+21=$ কত ?

§1·15 আরও কয়েকটি প্রয়োজনীয় সূত্র

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3+3ab(a+b),$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3-3ab(a-b),$$
$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

উদাহরণ 1. নীচের রাশিগুলির ঘন বের কর—

(*i*) $(a-b+c)^3=\{(a-b)+c\}^3=(a-b)^3+3(a-b)^2(c)+3(a-b).(c)^2+(c)^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3(a^2-2ab+b^2).c+3c^2(a-b)+c^3$

$=a^3-b^3+c^3-3a^2b+3ab^2+3a^2c+3b^2c+3c^2a-3c^2b-6abc$

(*ii*) $(52)^3=(50+2)^3=(50)^3+3.(50)^2.2+3.50.(2)^2+(2)^3$

$=125000+15000+600+8=140608$

উদাহরণ 2. $m-n=3$ এবং $mn=8$ হ'লে $m^3-n^3=$ কত ?

$m^3-n^3=(m-n)^3+3m.n(m-n)=(3)^3+3.8.3$

$=27+72=99$

উদাহরণ 3. $x+\frac{1}{x}=2$ হ'লে $x^3+\frac{1}{x^3}=$ কত ?

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=2^3-3.2=8-6=2$$

উদাহরণ 4. $x+y=5$ হ'লে $x^3+y^3+15xy=$ কত ?

$$x^3+y^3+15xy=(x+y)^3-3xy(x+y)+15xy=(5)^3-3xy.(5)+15xy$$

$$=125-15xy+15xy=125$$

উদাহরণ 5. সরল কর—

(i) $(x+y-z)^3+(x-y+z)^3+6x(x+y-z)(x-y+z)$

(ii) $(15{\cdot}9765)^3-(14{\cdot}4765)^3-4{\cdot}5\times15{\cdot}9765\times14{\cdot}4765$

(iii) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

(iv) $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-z)(y^2+yz+z^2)+(z-x)(z^2+zx+x^2)$

(i) $x+y-z$ এর জায়গায় a এবং $x-y+z$ এর জায়গায় b বসিয়ে পাই— $a+b=x+y-z+x-y+z=2x$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি$=a^3+b^3+3.2x.ab=a^3+b^3+3ab.(a+b)$

$=(a+b)^3=(2x)^3=8x^3$ (উত্তর)

(ii) $15{\cdot}9765=a$ এবং $14{\cdot}4765=b$ লিখে পাই $a-b=1{\cdot}5$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$=(a-b)^3=(1{\cdot}5)^3=(\frac{3}{2})^3=\frac{27}{8}=3{\cdot}375$ (উত্তর)

(iii) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=(x^2+1)\{(x^2)^2-x^2.1+(1)^2\}$

$=(x^2)^3+(1)^3=x^6+1$ (উত্তর)

(iv) $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-z)(y^2+yz+z^2)+(z-x)(z^2+zx+x^2)$

$=x^3-y^3+y^3-z^3+z^3-x^3=0$ (উত্তর)

§1·16. প্রশ্নমালা 3

1. নীচের রাশিগুলির ঘন বের কর :

(i) $x+a$ (ii) x^2-a^2 (iii) x^2-x+1 (vi) $ax+by$

(v) x^4-1 (vi) $(5a+6b)$ (vii) $(2x^2-3y^2)$ (viii) $l+m+n$

(ix) 99

2. $a+b=3p$ এবং $ab=3p^2$ হ'লে প্রমাণ কর $a^3+b^3=0$

3. $a+b=8$ এবং $ab=1$ হ'লে $a^3+b^3=$ কত ?

4. $x-y=5$ এবং $xy=1$ হ'লে $x^3-y^3=$ কত ?

5. $p+q=c$ হ'লে প্রমাণ কর $p^3+q^3+3cpq=c^3$

6. $p-q=c$ হ'লে প্রমাণ কর $p^3-q^3-3cpq=c^3$

7. $x+y=6$ হ'লে $x^3+y^3+18xy=$ কত ?

8. $x-y=3$ হ'লে $x^3-y^3-9xy=$ কত ?

9. $x+\frac{1}{x}=-3$ হ'লে $x^3+\frac{1}{x^3}=$ কত ?

10. $m+\frac{1}{m}=2$ হ'লে $m^3+\frac{1}{m^3}=$ কত ?

11. $z-\frac{1}{z}=4$ হ'লে $z^3-\frac{1}{z^3}=$ কত ?

12. $x+\frac{1}{x}=3$ হ'লে $x^6+\frac{1}{x^6}=$ কত ?

13. $x-\frac{1}{x}=3$ হ'লে $x^6+\frac{1}{x^6}=$ কত ?

14. $x-y=1$ হ'লে $x^3-y^3-3xy=$ কত ?

15. সরল কর :

(i) $(2x+3y+4z)^3-(x+2y+4z)^3-3(2x+3y+4z)(x+2y+4z)(x+y)$

(ii) $8(x+y+z+2)^3-(2x+2y+2z+3)^3-3(x+y+z+2)(2x+2y+2z+3)$

(iii) $(ax+by-cz)^3+(ax-by+cz)^3+6ax(ax+by-cz)(ax-by+cz)$

(iv) $(3{\cdot}367)^3+(6{\cdot}633)^3+30\times 3{\cdot}367\times 6{\cdot}633$

(v) $(17{\cdot}293)^3-(14{\cdot}793)^3-7{\cdot}5\times 17{\cdot}293\times 14{\cdot}793$

(vi) $(a+b)^3+(a-b)^3+6a(a^2-b^2)$

(vii) $(1{\cdot}23)^3+(1{\cdot}77)^3+9\times 1{\cdot}23\times 1{\cdot}77$

(viii) $(a+b)^3-(a-b)^3-6b(a^2-b^2)$

(ix) $(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$

(x) $(l^2-m^2)(l^4+l^2m^2+m^4)+(m^2-n^2)(m^4+m^2n^2+n^4)$
$+(n^2-l^2)(n^4+n^2l^2+l^4)$

(xi) $(x+2)(x^2-2x+4)-(x-2)(x^2+2x+4)$

(xii) $(b+c-a)^3-(c-a-b)^3-6b(b+c-a)(c-a-b)$

(xiii) $(2{\cdot}753)^3+(2{\cdot}247)^3+15\times 2{\cdot}753\times 2{\cdot}247$

(xiv) $(m^2-n^2)(m^4+m^2n^2+n^4)$

সহজ উৎপাদকে বিশ্লেষণ (Easy factorisation)

§ **1·17.** বীজগণিতের কোনও রাশিমালা একাধিক রাশির গুণফলের সমান হলে শেষের রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে প্রথম রাশিমালার উৎপাদক বা গুণনীয়ক (factor) বলে। এই উৎপাদকগুলির কোনও একটিকে যদি আবার একাধিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব না হয় তবে ঐ বিশেষ উৎপাদককে মূল রাশিমালার একটি মৌলিক উৎপাদক (prime factor) বলে। উৎপাদক বের করা বলতে সাধারণতঃ এই মৌলিক উৎপাদকগুলো বের করা বুঝায়। এবার উৎপাদক বের করার উপায়গুলো আলোচনা করা যাক্।

A. রাশিমালার মধ্যে কোন সাধারণ পদ থাকলে সেটি রাশিমালার একটি উৎপাদক। যেমন,

(i) $x^3+3x^2y=x^2(x+3y)$ এখানে x^2 হচ্ছে x^3+3x^2y এর একটি উৎপাদক। তবে x^2 মৌলিক উৎপাদক নয়। কারণ $x^2=x\times x$

(ii) $3x^2(a+b)+18xy(a+b)=3x(a+b)(x+6y)$ এখানে 3, x, $(a+b)$ প্রত্যেকটি মূল রাশিমালার উৎপাদক এবং এরা প্রত্যেকে মৌলিক উৎপাদক।

B. সূত্র সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয় ঃ বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে কিভাবে একটি রাশিমালার উৎপাদক বের করতে হয় তা উদাহরণের সাহায্যে দেখান হচ্ছে।

উদাহরণ 1. $18x^2+24xy+8y^2$ এবং $3a^3-12a^2b+12ab^2$ এর উৎপাদক বের কর।

$$18x^2+24xy+8y^2=2(9x^2+12xy+4y^2)$$
$$=2\{(3x)^2+2(3x).(2y)+(2y)^2\}$$
$$=2(3x+2y)^2$$
$$=2(3x+2y)(3x+2y)$$

অতএব নির্ণেয় উৎপাদকগুলি$=2,\ (3x+2y),\ (3x+2y)$

$$3a^3-12a^2b+12ab^2=3a(a^2-4ab+4b^2)$$
$$=3a\{(a)^2-2.(a).(2b)+(2b)^2\}$$
$$=3a(a-2b)^2$$
$$=3a(a-2b)(a-2b)$$

অতএব নির্ণেয় উৎপাদকগুলি $=3,\ a,\ (a-2b),\ (a-2b)$

উদাহরণ 2. (i) x^4+4y^4 (ii) $x^2-4z^2-2xy-4yz$

(iii) $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

(i) $x^4+4y^4=(x^2)^2+2.x^2.2y^2+(2y^2)^2-4x^2y^2$
$$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$$
$$=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy) \quad \text{উত্তর}$$

(ii) $x^2-4z^2-2xy-4yz=x^2-2xy+y^2-y^2-4yz-4z^2$
$$=(x^2-2xy+y^2)-(y^2+4yz+4z^2)=(x-y)^2-(y+2z)^2$$
$$=\{(x-y)-(y+2z)\}\{(x-y)+(y+2z)\}$$
$$=(x-y-y-2z)(x-y+y+2z)$$
$$=(x-2y-2z)(x+2z) \quad \text{উত্তর}$$

(iii) $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$
$$=4b^2c^2-2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$$
$$=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$$
$$=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$
$$=\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}$$
$$=\{2bc-b^2-c^2+a^2\}\{2bc+b^2+c^2-a^2\}$$
$$=\{a^2-(b^2+c^2-2bc)\}\{(b^2+c^2+2bc)-a^2\}$$
$$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$$
$$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\{(b+c)-a\}\{(b+c)+a\}$$
$$=(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \quad \text{উত্তর}$$

উদাহরণ 3. (i) $8x^3+12x^2+6x+9$

(ii) x^6-y^6 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

(i) $8x^3+12x^2+6x+9=(2x)^3+3(2x)^2.1+3.2x.(1)^2+(1)^3+8$
$$=(2x+1)^3+(2)^3$$

$$=\{(2x+1)+2\}.\{(2x+1)^2-(2x+1).2+(2)^2\}$$
$$=(2x+3)(4x^2+4x+1-4x-2+4)$$
$$=(2x+3)(4x^2+3) \quad \text{উত্তর}$$

(*ii*) $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$
$$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$=(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \quad \text{উত্তর}$$

C. উৎপাদক বের করার আর একটি প্রয়োজনীয় সূত্র :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$

প্রমাণ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$$
$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b).c+c^2\}-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\}$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

প্রথম অংশ প্রমাণিত হল।

$$=\tfrac{1}{2}(a+b+)(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)(b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ca+a^2+b^2-2ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$

দ্বিতীয় অংশ ও প্রমাণিত হল।

উদাহরণ 4. x^6+18x^3+1 এর উৎপাদক বের কর।

$$x^6+18x^3+1=(x^2)^3+(1)^3+(3x)^3-3.(x^2).1.(3x)$$
$$=(x^2+1+3x)\{(x^2)^2+(1)^2+(3x)^2-x^2.1-1.3x-3x.x^2\}$$
$$=(x^2+3x+1)(x^4-3x^3+8x^2-3x+1) \quad \text{উত্তর}$$

D. px^2+qx+r বা $px^2+qxy+ry^2$ এই আকারের রাশির উৎপাদক বের করবার সময় এমন দু'টি সংখ্যা বের করতে হবে যাদের যোগফল$=q$ এবং গুণফল$=p.r$। এরপরে q এর জায়গায় সংখ্যা দুটিকে যোগ চিহ্ন দিয়ে বসিয়ে নীচের প্রক্রিয়ায় উৎপাদক বের করতে হবে।

উদাহরণ 5. (i) $3x^2+14x+16$ (ii) $7x^2-xy-30y^2$ এর উৎপাদক বের কর।

(i) $3x^2+14x+16$ এখানে $3\times16=48=6\times8$

$=3x^2+(6+8)x+16$ আবার $6+8=14$

$=3x^2+6+x8x+16$

$=3x(x+2)+8(x+2)$

$=(x+c)(3x+8)$ উত্তর

(ii) $7x^2-xy-30y^2$

$=7x^2-15xy+14xy-30y^2$

$=x(7x-15y)+2y(7x-15y)$

$=(7x-15y(x+2y)$ উত্তর

এখানে $7\times(-30)=-210$
আবার $-210=(-15)\times(14)$
এবং $-15+14=-1$

উদাহরণ 6. $2x^2+4y^2-3z^2-6xy+4yz-5zx$ এর উৎপাদক বের কর।

$2x^2+4y^2-3z^2-6xy+4yz-5zx$

$=2x^2-x(6y+5z)+(4y^2+4yz-3z^2)$

$=2x^2-x(6y+5z)+\{4y^2+6yz-2yz-3z^2\}$

$=2x^2-x(6y+5z)+\{2y(2y+3z)-z(2y+3z)\}$

$=2x^2-x(6y+5z)+(2y+3z)(2y-z)$

[এইটি px^2+qx+r আকারের যখন $p=2,\quad q=-(6y+5z)$ $r=(2y+3z)(2y-z)$

$p.r=2(2y+3z)(2y-z)=\{-2(2y+3z)\}\times\{-(2y-z)\}$

এবং $-2(2y+3z)-(2y-z)=-(6y+5z)=q$]

$=2x^2-2(2y+3z)x-(2y-z)x+(2y+3z)(2y-z)$

$=2x\{x-(2y+3z)\}-(2y-z)\{x-(2y+3z)\}$

$=(x-2y-3z)\{2x-(2y-z)\}=(x-2y-3z)(2x-2y+z)$ উত্তর

E. পরীক্ষার সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয় ঃ

বীজগণিতের রাশিমালায় x এর বিভিন্ন ঘাত বর্তমান থাকলে যদি দেখা যায় x এর বদলে a বসানোর ফলে সমগ্র রাশিমালার মান শূন্য হয়ে যায় তবে $x-a$ ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক হবে।

উদাহরণ 7. $x^4+2x^3-12x^2+7x+2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। $x^4+2x^3-12x^2+7x+2$ এই রাশিমালায় x এর জায়গায় 1 বসাইলে এটার মান শূণ্য হয়। সুতরাং $x-1$ এর একটি উৎপাদক।

$$x^4+2x^3-12x^2+7x+2$$
$$=x^4-x^3+3x^3-3x^2-9x^2+9x-2x+2$$
$$=x^3(x-1)+3x^2(x-1)-9x(x-1)-2(x-1)$$
$$=(x-1)(x^3+3x^2-9x-2)$$

আবার x^3+3x^2-9x-2 এই রাশিটিতে $x=2$ বসালে এর মান শূণ্য হয়। সুতরাং $x-2$ একটি উৎপাদক।

$$\therefore \text{প্রদত্তরাশি}=(x-1)(x^3+3x^2-9x-2)$$
$$=(x-1)(x^3-2x^2+5x^2-10x+x-2)$$
$$=(x-1)\{x^2(x-2)+5x(x-2)+1.(x-2)\}$$
$$=(x-1)(x-2)(x^2+5x+1) \quad \text{উত্তর}$$

F. বৃত্ত-ক্রমে সাজানো রাশির উৎপাদক নির্ণয়ঃ

[বৃত্তক্রম—পাশের ছবিতে তীর চিহ্ন দিয়ে দেখান হয়েছে কোন অক্ষরের পর কোন অক্ষর আসছে। যেমন a এর পরে b, b এর পর c, c এর পর আবার a, ঠিক সেইভাবে $b+c$ এর পর $c+a$ এবং $a+b$ আসবে, ইত্যাদি।]



উদাহরণ 8. নীচের রাশিগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ

(i) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(ii) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

(iii) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

(iv) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$

(i) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$$
$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-bc^2$$
$$=a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)+bc(b-c)$$
$$=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$$

$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$
$=(b-c)(a-c)(a-b)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)$ উত্তর

(*ii*) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
$=a^3(b-c)+b^3c-ab^3+c^3a-bc^3$
$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$
$=a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b-c)(b+c)$
$=(b-c)\{a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2\}$
$=(b-c)\{a(a^2-b^2)-abc+b^2c-ac^2+bc^2\}$
$=(b-c)\{a(a+b)(a-b)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}$
$=(b-c)(a-b)(a^2+ab-bc-c^2)$
$=(b-c)(a-b)(a^2-c^2+ab-bc)$
$=(b-c)(a-b)\{(a-c)(a+c)+b(a-c)\}$
$=(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ উত্তর

(*iii*) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$=a^2(b+c)+b^2c+ab^2+c^2a+c^2b+2abc$
$=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+b^2c+bc^2$
$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+ab+ac+bc\}$
$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$
$=(b+c)(c+a)(a+b)$ উত্তর

(*iv*) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$
$=bc(b+c)+abc+ca(c+a)+abc+ab(a+b)+abc$
$=bc(b+c+a)+ca(c+a+b)+ab(a+b+c)$
$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$ উত্তর

§ 1·18 প্রশ্নমালা 4

নীচের রাশিগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ

1. $2a^2b+3ab^2$
2. $al(ax-by)-bm(ax-by)$
3. x^2-5x+6
4. x^2-5x-6

5. $x^4-20x^2y^2+64$ 6. x^4+3x^2-4

7. $x^2-x-(a+2)(a+3)$ 8. $(x+y)^2-7(x+y)-60$

9. $a^2x^3y-4abx^2y^2+4b^2xy^3$ 10. $45x^2+120xy+80y^2$

11. $2x^4+128$ 12. $3x^4-48$

13. $x^2+6xy+24yz-16z^2$ 14. $x^4+7x^2y^2+16y^4$

15. $x^4+4x^2y^2+16y^4$ 16. $a^4-9a^2b^2+16b^4$

17. $a^4-17a^2b^2+16b^4$ 18. $5a^2x^6+135a^2x^3$

19. $81a^7-375a$ 20. x^6+y^6

21. $x^3+3x^2+3x+y^3+3y^2+3y+2$

22. $x^3+3x^2+3x+y^3-3y^2+3y$

23. $8x^3-27y^3-125z^3-90xyz$ 24. x^6+28x^3+27

25. x^6-9x^3+64 26. x^6+27

27. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)-18$

[Hints : রাশিমালা $=\{(x+1)(x+5)\}\{(x+2)(x+4)\}-18$
$=(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)-18$ এখন $x^2+6x=a$ বসিয়ে উৎপাদক বের করতে হবে।]

28. $(x-2)(x+3)(x-4)(x+1)+24$

29. $6x^4+13x^2y^2-5y^4$ 30. $7x^2-62x-9$

31. $6x^2-12y^2-10z^2+xy+26yz-11zx$

32. $54x^2-12y^2+3xy-33x+26y-10$

33. $x^5+x^4-3x^3-3x^2-4x-4$

34. $x^4+8x^3+18x^2+17x+10$

35. $4x^3+12x^2+11x+3$ 36. $x^4+6x^3+11x^2+6x$

37. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$

38. $(x-y)(z-y)(z+x)-xyz$

39. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+9xyz$

40. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz$

41. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^3+b^3+c^3$

42. $b^2c^2(b^4-c^4)+c^2a^2(c^4-a^4)+a^2b^2(a^4-b^4)$

43. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

44. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

45. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

46. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণণীয়ক (গ. সা. গু.) ও লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.) Higher common factor (H. C. F.) and Lowest common multiple (L. C. M.)

§ 1·19. গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.)

দুই বা তার বেশী সংখ্যক বীজগণিতের রাশিকে তাদের সাধারন অক্ষরের সর্ব্বোচ্চ ঘাত বিশিষ্ট যে রাশি দিয়ে ভাগ করলে কোনও ভাগশেষ থাকে না তাকে পূর্বের রাশিগুলির গ. সা. গু. বলা হয়।

§ 1·20. লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

দুই বা তার বেশী সংখ্যক বীজগণিতের রাশির প্রত্যেকটি দিয়ে যদি তাদের সাধারণ অক্ষরের সর্বনিম্ন ঘাতের কোনও রাশিকে ভাগ করলে কোনও ভাগশেষ না থাকে তবে শেষের রাশিটিকে প্রথমের রাশিগুলির ল. সা. গু. বলে।

§ 1·21. উৎপাদক সাহায্যে গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয়।

প্রথমে যে সকল রাশির গ. সা. গু বা ল. সা. গু. বের করতে হবে তাদের যতোগুলো সম্ভব উৎপাদকে ভেঙ্গে ফেলতে হবে। তারপর যে সব উৎপাদক প্রত্যেকটি রাশির মধ্যে আছে তাদের সবার গুণফলই হবে ঐ রাশিগুলির গ. সা. গু.। আর ল. সা. গু. বের করার সময় সাধারণ অক্ষরগুলির ঘাত সব থেকে ছোট রেখে এমন ভাবে সমস্ত উৎপাদক নিতে হবে যেন এদের গুণফলকে প্রত্যেকটি রাশি দিয়ে ভাগ করলে কোনও ভাগশেষ না থাকে।

উদাহরণ $4x^5-12x^4+20x^3-36x^2+24x$, $6x^5-30x^4+48x^3-24x^2$ এবং $10x^4+20x^3-130x^2+100x$ এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. বের কর।

প্রথম রাশি $=4x^5-12x^4+20x^3-36x^2+24x$

$$=4x\{x^4-3x^3+5x^2-9x+6\}$$
$$=4x\{x^4-x^3-2x^3+2x^2+3x^2-3x-6x+6\}$$
$$=4x\{x^3(x-1)-2x^2(x-1)+3x(x-1)-6(x-1)\}$$
$$=4x(x-1)(x^3-2x^2+3x-6)$$
$$=4x(x-1)\{x^2(x-2)+3(x-2)\}$$
$$=2.2x(x-1)(x-2)(x^2+3)$$

[$x=1$ বসালে রাশিটি শূণ্য হয়, $\therefore$ $x-1$ একটি উৎপাদক।]

দ্বিতীয় রাশি $=6x^5-30x^4+48x^3-24x^2$

$=6x^2\{x^3-5x^2+8x-4\}$

$=6x^2\{x^3-x^2-4x^2+4x+4x-4\}$

$=6x^2\{x^2(x-1)-4x(x-1)+4(x-1)\}$

$=6x^2(x-1)(x^2-4x+4)$

$=2.3x^2(x-1)(x-2)^2$

[$x=1$ বসালে রাশিটি শূণ্য হয়, $\therefore$ $x-1$ একটি উৎপাদক।]

তৃতীয় রাশি $=10x^4+20x^3-130x^2+100x$

$=10x\{x^3+2x^2-13x+10\}$

$=10x\{x^3-x^2+3x^2-3x-10x+10\}$

$=10x\{x^2(x-1)+3x(x-1)-10(x-1)\}$

$=10x(x-1)(x^2+3x-10)$

$=10x(x-1)(x^2+5x-2x-10)$

$=2.5.x(x-1)(x+5)(x-2)$

[$x=1$ বসালে রাশিটি শূণ্য হয়, $\therefore$ $x-1$ একটি উৎপাদক।]

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2x(x-1)(x-2)$

এবং ল. সা. গু. $=2.2.3.5x(x-1)(x-2)^2(x+5)(x^2+3)$

$=60(x-1)(x-2)^2(x+5)(x^2+3)$

§ 1·22. বীজগণিতের ভাগের সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয় ঃ

প্রথমে একপদ রাশি বের করে নিতে হ'বে। পরে অবশিষ্ট রাশিগুলির মধ্যে দু'টি দু'টি করে ভাগ করে গ. সা. গু. বের করতে হ'বে। একপদ রাশিগুলি আগেই বের করে রাখার জন্য আমরা রাশিগুলিকে বা ভাগশেষ-গুলিকে প্রয়োজন মত একপদ রাশি দিয়ে গুণ ও ভাগ করে নিতে পারবো। এইভাবে যে গ. সা. গু. বের হ'বে তাকে পূর্বের একপদ রাশিগুলির গ. সা. গু. দিয়ে গুণ করলেই নির্ণেয় গ. সা. গু. পাওয়া যাবে। নীচের উদাহরণটি দেখলেই বোঝা যাবে।

উদাহরণ $12x^5+34x^4+60x^3+54x^2$ এবং $12x^5+54x^4+78x^3+96x^2+90x$ এর গ. সা. গু. বের কর ঃ

প্রথম রাশি $= 12x^5+34x^4+60x^3+54x^2$

$=2x^2(6x^3+17x^2+30x+27)$

দ্বিতীয় রাশি $=12x^5+54x^4+78x^3+96x^2+90x$

$=6x(2x^4+9x^3+13x^2+16x+15)$

একপদ রাশিগুলির অর্থাৎ $2x^2$ এবং $6x$ গ. সা. গু.$=2x$, বাকী রাশিগুলির গ. সা. গু. ভাগের সাহায্যে বের করা যাক্।

$$
\begin{array}{l}
6x^3+17x^2+30x+27\,)\,2x^4+9x^3+13x^2+16x+15\,(\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times 3\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{6x^4+27x^3+39x^2+48x+45}\,(x\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{6x^4+17x^3+30x^2+27x}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 10x^3+\ 9x^2+21x+45\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times 3\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{30x^3+27x^2+63x+135}\,(5\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{30x^3+85x^2+150x+135}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -58x^2-87x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-29x)\,\underline{-58x^2-87x}\\
\qquad\qquad 2x+3)\,6x^3+17x^2+30x+27\,(3x^2+4x+9\\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{6x^3+\ 9x^2}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 8x^2+30x+27\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{8x^2+12x}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 18x+27\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{18x+27}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু.$=2x(2x+3)$

[ভাগ করলে ভগ্নাংশ রাশি আসে বলে 3 দিয়ে গুণ করে পরে ভাগ করা হ'ল]

দ্রষ্টব্য—দুই-এর বেশী রাশি থাকলে প্রথমে দুটি রাশির গ. সা. গু. করতে হয় পরে সেই গ. সা. গু. ও তৃতীয় রাশির মধ্যে গ. সা. গু. বের করতে হয়। এইভাবে যে কোন সসীম সংখ্যক রাশির গ. সা. গু. বের করা যায়।

আবার দুটি রাশির ল. সা. গু. বের করার সময় যখন তাদের সহজে উৎপাদকে ভাঙ্গা যায় না তখন উহাদের গ. সা. গু. বের করে নীচের সূত্রের সাহায্যে ল. সা. গু. বের করতে হয়।

দুটি রাশির ল. সা. গু.$=\dfrac{\text{রাশি দু'টির গুণফল}}{\text{তাদের গ. সা. গু.}}$

উদাহরণ পূর্বের উদাহরণের রাশি দুটির ল. সা. গু. বের কর। আগেই দেখেছি রাশিদুটির গ. সা. গু. $=2x(2x+3)$

$\therefore$ তাদের ল. সা. গু. $=\dfrac{\text{তাদের গুণফল}}{\text{গ. সা. গু.}}$

$$=\frac{2x^2(6x^3+17x^2+30x+27).6x(2x^4+9x^3+13x^2+16x+15)}{2x(2x+3)}$$

$$=6x^2.(3x^2+4x+9)(2x^4+9x^3+13x^2+16x+15)$$

দ্রষ্টব্য—দুই এর বেশী রাশি থাকলে প্রথমে দুটি রাশির ল. সা. গু. করে পরে তৃতীয় রাশি ও এই ল. সা. গু. এর ল, সা. গু. বের করতে হবে। এইভাবে পর পর কষে উত্তর বের করতে হবে।

§ 1·23 প্রশ্নমালা 5

নীচের রাশিগুলির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. বের কর।

1. $3x^2+10x-8,\ 3x^3+10x^2+4x-8$
2. $6x^4-15x^3+9x^2,\ 9x^3+27x^2-36x,\ 9x^5+6x^4-15x^3$
3. $24x^4-30x^3+9x^2,\ 36x^3+54x^2-36x,\ 36x^5+12x^4-15x^3$
4. $162x^4-135x^3+102x-4,\ 27x^3-18x^2+16$
5. $x^3+x+2,\ x^3+3x+4,\ x^3+2x^2-1$
6. $16x^3+20x^2+12x+3,\ 16x^3+28x^2+18x+6$
7. $6x^3+22x^2+24x+8,\ 4x^3-28x-24$

সরলীকরণ (Simplification) এবং অভেদাবলী (Identities)

1·2। বীজগণিতে $\dfrac{ax+b}{cx+d},\ \dfrac{2x}{a},\ \dfrac{ax^2+bx+g}{cx+d},\ \dfrac{ax^2+bx+g}{cx^2+dx+f},\ldots$ এই রকমের রাশিকে ভগ্নাংশ বলে। উপরের রাশিটিকে লব আর নীচের রাশিটিকে হর বলে। কতকগুলি ভগ্নাংশে বীজগণিতিক যোগফল বের করার সময় পাটীগণিতের মতো হরগুলির ল.সা.গু. বার করে কষে যেতে হয়। নীচের উদাহরণ দেখলেই স্পষ্ট বোঝা যাবে। গুণ ও ভাগের সময়েও পাটীগণিতের নিয়মে করতে হয়।

উদাহরণ 1. সরল কর : $\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}+\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{2a^3}{a^4+b^4}$

রাশিমালা $=\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}+\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{2a^3}{a^4+b^4}$

$$=\left\{\frac{1}{a+b}+\frac{b}{(a+b)(a-b)}\right\}+\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{2a^3}{a^4+b^4}$$

$$=\frac{a-b+b}{(a+b)(a-b)}+\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{2a^3}{a^4+b^4}$$

$$=\left\{\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{a}{a^2+b^2}\right\}+\frac{2a^3}{a^4+b^4}$$

$$=\frac{a^3+ab^2+a^3-ab^2}{a^4-b^4}+\frac{2a^3}{a^4+b^4}$$

$$=\frac{2a^3}{a^4-b^4}+\frac{2a^3}{a^4+b^4}=\frac{2a^3(a^4+b^4)+2a^3(a^4-b^4)}{(a^4-b^4)(a^4+b^4)}$$

$$=\frac{2a^7+2a^3b^4+2a^7-2a^3b^4}{a^8-b^8}=\frac{4a^7}{a^8-b^8}$$ উত্তর

উদাহরণ 2. সরল কর :

$$\frac{x^2+xy-y^2}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}+\frac{x^2-xy-y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}-\frac{x}{y^2-x^2}-\frac{2x^3}{x^4-y^4}$$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{x^2+xy-y^2}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}+\frac{x^2-xy-y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$

$$-\frac{x}{y^2-x^2}-\frac{2x^3}{x^4-y^4}$$

$$=\frac{x^2+xy-y^2}{x^2(x-y)+y^2(x-y)}+\frac{x^2-xy-y^2}{x^2(x+y)+y^2(x+y)}$$

$$-\frac{x}{-(x+y)(x-y)}-\frac{2x^3}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{x^2+xy-y^2}{(x-y)(x^2+y^2)}+\frac{x^2-xy-y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$+\frac{x}{(x-y)(x+y)}-\frac{2x^3}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{(x+y)(x^2+xy-y^2)+(x-y)(x^2-xy-y^2)+x(x^2+y^2)-2x^3}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{x\{(x^2+xy-y^2)+(x^2-xy-y^2)\}+y\{(x^2+xy-y^2)-(x^2-xy-y^2)\}+x^3+xy^2-2x^3}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{x(2x^2-2y^2)+y.(2xy)+xy^2-x^3}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{2x^3-2xy^2+2xy^2+xy^2-x^3}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{x^3+xy^2}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{x(x^2+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{x}{x^2-y^2}$$ উত্তর

§ **1·25.** অভেদ **(Identities)** বীজগণিতের দু'টি রাশি সরল করার পর যদি একই চেহারার হয় তবে ঐ দুটি রাশিকে দুই পাশে বসিয়ে মধ্যে সমান চিহ্ন (=) বসিয়ে লেখা হয়। এদের অভেদ বলে। অভেদ দুই রকমের (1) নিরপেক্ষ (unconditional) (2) সাপেক্ষ (conditional)। রাশি দুটির মধ্যে সমতা রক্ষার জন্য যদি কোনও সর্তের দরকার না হয় তবে তাকে নিরপেক্ষ অভেদ বলে। আর যদি কোনও সর্তের ফলে লিখিত সমতাটি অভেদ হয় তবে তাকে সাপেক্ষ অভেদ বলে।

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর $a+(1-a)b+(1-a)(1-b)c$
$=1-(1-a)(1-b)(1-c)$

বাম পক্ষ$=a+(1-a)b+(1-a)(1-b).c$
$=1-1+a+(1-a)b+(1-a)(1-b).c$
$=1-(1-a)+(1-a)b+(1-a)(1-b).c$
$=1-(1-a)\{1-b-(1-b).c\}$
$=1-(1-a)(1-b)(1-c)$
$=$ডান পক্ষ। প্রমাণিত।

উদাহরণ 6. $a+b+c=0$ হ'লে প্রমান কর :

$(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3$
$=3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

সমাধান :

$b+c-a=x$, $c+a-b=y$, $a+b-c=z$ বসালে
$x+y+z=b+c-a+c+a-b+a+b-c=a+b+c=0$,
সর্ত অনুসারে।

$\therefore\ x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$=0$

যেহেতু $x+y+z=0$

$\therefore\ x^3+y^3+z^3=3xyz$

অথবা, $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3$
$$=3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

উদাহরণ 7. $2s=a+b+c$ হ'লে প্রমান কর :
$$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16s(s-a)(s-b)(s-c)$$

সমাধান :

$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$
$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ (১৭ পৃষ্ঠা দেখ)
$=(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)$
$=2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)$ [যেহেতু $a+b+c=2s$]
$=16s(s-a)(s-b)(s-c)$ প্রমানিত।

উদাহরণ 8. $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$ হ'লে প্রমান কর হয় $a+b+c=0$ নতুবা $a=b=c$

প্রমান :
$$\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$$

অথবা, $\frac{b+c}{a}+1=\frac{c+a}{b}+1=\frac{a+b}{a}+1$

অথবা, $\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{c}$

$\therefore$ হয় $a+b+c=0$ নতুবা $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ অর্থাৎ $a=b=c$

উদাহরণ 9. $a^3+b^3+c^3=3abc$ হ'লে প্রমাণ কর হয় $a+b+c=0$ নতুবা $a=b=c$

প্রমাণ $a^3+b^3+c^3=3abc$
অথবা, $a^3+b^3+c^3-3abc=0$
অথবা, $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=0$

$\therefore$ হয় $a+b+c=0$

নতুবা $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=0$

এখন $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ এবং $(a-b)^2$ প্রত্যেকেই হয় ধণাত্মক কিংবা শূন্য। কিন্তু ইহাদের যোগফল শূন্য। সুতরাং ইহারা প্রত্যেকেই শূন্য।
$\therefore$ $b-c=0, c-a=0, a-b=0$ অর্থাৎ $a=b=c$. প্রমানিত

উদাহরণ 10. $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$ হ'লে প্রমান কর

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$$

প্রমাণ : $\frac{a}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$

অথবা, $\frac{a}{1+a}-1+\frac{b}{1+b}-1+\frac{c}{1+c}-1=1-3$ [উভয় পক্ষে 3 বিয়োগ করে]

অথবা, $-\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+c}=-2$

অথবা, $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$ প্রমাণিত

উদাহরণ 11. $a+\frac{1}{b}=1$ এবং $b+\frac{1}{c}=1$ হ'লে প্রমাণ কর $c+\frac{1}{a}=1$ এবং $abc+1=0$

প্রমাণ $a+\frac{1}{b}=1$ অথবা, $a=1-\frac{1}{b}=\frac{b-1}{b}=-\frac{1-b}{b}$

$b+\frac{1}{c}=1$ অথবা, $\frac{1}{c}=1-b$ অথবা, $c=\frac{1}{1-b}$

$\therefore\ c+\frac{1}{a}=\frac{1}{1-b}-\frac{b}{1-b}=\frac{1-b}{1-b}=1$

এবং $ca=\frac{1}{1-b}\left(-\frac{1-b}{b}\right)=-\frac{1}{b}$ অথবা, $abc+1=0$

} প্রমাণিত

§ 1·26. প্রশ্নমালা 6

নীচের রাশিমালাগুলি সরল কর :

1. $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}$ 2. $\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2+6x+16}$

3. $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}+\frac{2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$

4. $\frac{2}{x^2+4x+3}+\frac{3}{x^2+10x+21}-\frac{5}{x^2+8x+7}$

5. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}\times\frac{x^2+7x+12}{x^2+4x+4}$ 6. $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\div(a-b)$

7. $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-6x+8}\times\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+6}\times\dfrac{x^2-10x+24}{x^2-8x+15}$

8. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}-\dfrac{8}{x^8+1}-\dfrac{16}{x^{16}+1}$

9. $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$

10. $\dfrac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c^2+ca+a^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}$

প্রমান কর যে

11. $(lx+my)^2+(mx-ly)^2=(l^2+m^2)(x^2+y^2)$

12. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$

13. $(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2)-(al+bm+cn)^2=$
$(bn-cm)^2+(cl-an)^2+(am-bl)^2$

14. $a+b+c=0$ হ'লে প্রমা

(i) $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab=-(bc+ca+ab)$

(ii) $a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)=0$

(iii) $a(b^2+c^2-a^2)=b(c^2+a^2-b^2)=c(a^2+b^2-c^2)$

(iv) $\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$

15. $2s=a+b+c$ হ'লে প্রমান কর যে

$\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s-b}+\dfrac{1}{s-c}-\dfrac{1}{s}=\dfrac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

16. $3s=a+b+c$ হ'লে প্রমান কর

$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$

17. $x+y+z=xyz$ হ'লে প্রমান কর

$\dfrac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=1$

দ্বিতীয় অধ্যায়

সরল সমীকরণ নির্দেশক প্রশ্নাবলী

(Problems leading to simple equations)

§ **2·1** সাধারণ ভাষায় কোনও একটি প্রশ্ন দেওয়া থাকলে তাকে আমরা গণিতের ভাষায় প্রকাশ করতে পারি। এটাকে আমরা সাধারণ ভাষা থেকে গণিতের ভাষায় অনুবাদ বলে থাকি। অনুরূপভাবে আমরা গণিতের ভাষাকেও সাধারণ ভাষায় লিখতে পারি। আর এটা অনেক রকম ভাবেই হ'তে পারে। নীচের উদাহরণগুলি দেখলেই স্পষ্ট বোঝা যাবে।

উদাহরণ 1. গণিতের ভাষায় অনুবাদ কর।

(*i*) দু'টি পর পর স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 75.

(*ii*) পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ ও উভয়ের বয়সের সমষ্টি 93 বৎসর।

সমাধান ঃ

(*i*) মনে করা যাক ছোট সংখ্যাটি $= x$.

সুতরাং বড় সংখ্যাটি $= x+1$

$\therefore\ x+(x+1)=75$

এই সম্বন্ধটি হ'ল গণিতের ভাষায় অনুবাদ। এখানে দু' দিকের রাশির মধ্যে সমান চিহ্ন দিয়ে লেখা হয়েছে। আর এর মধ্যে একটি রাশি $(=n)$ অজ্ঞাত রাশি। এই রকমের সম্পর্ককে সমীকরণ (equation) বলা হয়। এতে—সাধারণ ভাষার একটি প্রশ্ন গণিতের ভাষায় একটি সমীকরণে রূপান্তরিত হল।

(*ii*) মনে করা যাক্ পুত্রের বয়স $= x$ বৎসর।

সুতরাং পিতার বয়স $= 2x$ বৎসর।

$\therefore\ 2x+x=93,$

এই সমীকরণটি হল গণিতের ভাষায় অনুবাদ।

উদাহরণ 2. $x+(x+1)=75$ কে সাধারণ ভাষায় ব্যাখ্যা (অনুবাদ) কর।

সমাধান ঃ

উপরের সমীকরণটি অনেক উপায়েই ব্যাখ্যা করা যায়। যেমন,

(*i*) দু'টি পর পর স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 75,

(*ii*) একটি গরুর দাম একটি মহিষের দাম থেকে 1 টাকা বেশী আর উভয়ের মোট দাম 75 টাকা,

(*iii*) একজন ছেলে অপর জনের থেকে এক বছরের বড় আর উভয়ের বয়সের যোগফল 75 বছর,

ইত্যাদি।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে গণিতের ভাষায় একটি সমীকরণকে সাধারণ ভাষায় নানা ভাবেই লেখা যায়। উপরের সমীকরণে

প্রথম ক্ষেত্রে ঃ 'x' ছোট সংখ্যাটি বোঝায়

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঃ x মহিষের দাম বোঝায়

তৃতীয় ক্ষেত্রে ঃ x ছোট ছেলেটির বয়স বোঝায়।

§ 2·2 প্রশ্নমালা 7

1. গণিতের ভাষায় প্রকাশ কর (সমীকরণে প্রকাশ কর) ঃ

(*i*) পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিনগুণ আর দু'জনের বয়সের সমষ্টি 60 বৎসর।

(*ii*) 3 দিয়ে বিভাজ্য এরূপ পরপর তিনটি সংখ্যার যোগফল 36।

(*iii*) একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা 44 মিটার।

(*iv*) একটি সামান্তরিকের পরিসীমা 56 মিটার আর বৃহত্তর বাহু জোড়ার প্রত্যেকটি অপর বাহুজোড়ার প্রত্যেকটি থেকে 4 মিটার বেশী।

2. নীচের সমীকরণ গুলির প্রত্যেকটির অন্ততঃপক্ষে তিন রকমের ব্যাখ্যা দাও।

(*i*) $x+(x+1)+(x+2)=39$

(*ii*) $3x+(x+1)=64$

(*iii*) $x+(x+5)=69$

§ **2·3** তাহলে উপরের আলোচনা থেকে দেখতে পাচ্ছি যে প্রশ্নের সমাধান করতে গেলে সব সময়েই একটা সমীকরণ-পাওয়া যায়। সুতরাং কোনও প্রশ্নের সমাধান করার অর্থই হলো একটি (ক্ষেত্রবিশেষে একাধিক) সমীকরণের সমাধান করা। যে সকল সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির ঘাত কোনও পদেই এক এর বেশী নয় অর্থাৎ যে সব সমীকরণকে সরলীকরণের পর $ax+b=0$ আকারে লেখা যায় তাকেই সরল সমীকরণ বলে। আমরা এখানে কেবল সরল সমীকরণের সমাধান সম্বন্ধে আলোচনা করব।

সমীকরণ সমাধানের জন্য মনে রাখার মতো দুটি নিয়ম।

1. পক্ষান্তর করণ: সমীকরণের বাঁদিকের কোনও পদ ডানদিকে কিংবা ডানদিকের কোনও পদ বাঁদিকে আনতে হ'লে তার চিহ্ন পরিবর্তন করতে হয়। এই প্রক্রিয়াকে পক্ষান্তর করণ বলে।

2. কোনও সমীকরণের উভয় পক্ষকে শূণ্য ছাড়া সসীম (finite) কোনও সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে সমীকরণের কোনও পরিবর্তন ঘটে না।

3. বজ্রগুণণ পদ্ধতি:

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \text{ হ'লে } B.C=A.D$$

[উভয় পক্ষকে $B.D$ দিয়ে গুণ করলেই প্রমাণ হয়ে যাবে]

উদাহরণ 1. সমাধান কর

(*i*) $\frac{3x+5}{11}+\frac{5x-1}{9}=2$ (*ii*) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+4}=\frac{3}{x+3}$

সমাধান

(*i*) $\frac{3x+5}{11}+\frac{5x-1}{9}=2$

অথবা, $\frac{3}{11}x+\frac{5}{11}+\frac{5}{9}x-\frac{1}{9}=2$

অথবা, $(\frac{3}{11}+\frac{5}{9})x=2-\frac{5}{11}+\frac{1}{9}$

অথবা, $\frac{27+55}{99}.x=\frac{198-45+11}{99}$

অথবা, $\frac{82}{99}x=\frac{164}{99}$

অথবা, $x=\frac{164}{99}\times\frac{99}{82}$ (উভয় পক্ষকে $\frac{99}{82}$ দিয়ে গুণ ক'রে)

অথবা, $x=2$ উত্তর

(*ii*) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+4}=\frac{3}{x+3}$

অথবা, $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+4}=\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+3}$

অথবা, $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x+4}$

অথবা, $\frac{x+3-x-2}{(x+2)(x+3)}=\frac{2x+8-2x-6}{(x+3)(x+4)}$

অথবা, $\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{2}{(x+3)(x+4)}$

উভয় পক্ষকে $x+3$ দিয়ে গুণ ক'রে, ইহা সম্ভব কারণ $x+3\neq 0$ *

অথবা, $\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x+4}$

অথবা, $2x+4=x+4$

অথবা, $2x-x=4-4$

অথবা, $x=0$ উত্তর

§ 2·4 প্রশ্নমালা—8

নীচের সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $\cdot 25x-\cdot\dot{1}x=\cdot 1\dot{6}x-\cdot 75$

2. $\frac{51x-13}{19}+\frac{25x+7}{8}=\frac{7x+59}{11}$

3. $\frac{x-a-b}{1+ab}+\frac{x-b-c}{1+bc}+\frac{x-c-a}{1+ca}=a+b+c$

4. $\frac{a}{x}=\frac{b}{x+a-b}$

5. $\frac{x+1}{(2x+3)}+\frac{5x+1}{5}=\frac{3x+2}{3}$

6. $\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x+11}=\frac{1}{7(x+3)}$

7. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

8. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$

9. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$

10. $\frac{2}{4x+5}+\frac{3}{6x+4}=\frac{47}{47x+43}$

§ 2·5 সরল সমীকরণ নির্ভর প্রশ্নাবলী।

আমরা আগেই দেখেছি যে কোনও প্রশ্নের সমাধান একটি সমীকরণের সমাধানের উপর নির্ভর করে। এখন দেখা যাক কিভাবে এই প্রশ্নের সমাধান করা যায়।

---

* $x+3\neq 0$ কারণ $x+3$ শূন্য হলে সমীকরণটির কোন অর্থ হয় না। যেহেতু গণিতের নিয়মে শূন্য দিয়ে ভাগের কোনও সংজ্ঞা নেই।

(1) সংখ্যা বিষয়ক প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 1. এমন দু'টি পর পর বিজোড় সংখ্যা বের কর যাদের যোগফল 152।

ধরা যাক ছোট বিজোড় সংখ্যাটি $=x$

অতএব পরের বিজোড় সংখ্যাটি $=x+2$

প্রশ্নানুসারে

$x+(x+2)=152$

অথবা, $2x+2=152$

অথবা, $2x=152-2=150$

অথবা, $x=\frac{150}{2}=75$ (বিজোড় সংখ্যা)

$\therefore$ ছোট বিজোড় সংখ্যা $x=75$,

বড় বিজোড় সংখ্যা $x+2=77$

বিজোড় সংখ্যা দুটি হ'ল 75 ও 77	উত্তর

[এই প্রসঙ্গে নীচে উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য।]

উদাহরণ 2. এমন কোন দু'টি পর পর বিজোড় সংখ্যা বের করা কি সম্ভব যাদের যোগফল হ'বে 130?

যদি সম্ভব হয় তবে ধরা যাক

ছোট বিজোড় সংখ্যাটি $=x$

$\therefore$ বড় বিজোড় সংখ্যাটি $=x+2$

প্রশ্নানুসারে

$x+(x+2)=130$

অথবা, $2x+2=130$

অথবা, $2x=130-2=128$

অথবা, $x=\frac{128}{2}=64$, এটি বিজোড় সংখ্যা নয়।

সুতরাং প্রশ্নে উল্লিখিত সর্ত পূরণ করে এমন বিজোড় সংখ্যা নেই।	উত্তর

উদাহরণ 3. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককের অঙ্ক দশকের অঙ্কের তিন গুণ এবং অঙ্ক দু'টির যোগফল 12 হ'লে সংখ্যাটি কত ?

মনে করা যাক

দশকের অঙ্ক $=x$

$\therefore$ এককের অঙ্ক $=3x$

প্রশ্নানুসারে

$x+3x=12$

অথবা, $4x=12$

অথবা, $x=\frac{12}{4}$

অথবা, $x=3$

$\therefore$ দশকের অঙ্ক $=3$,

এককের অঙ্ক $=3\times3=9$

সুতরাং

সংখ্যাটি হ'ল 39	উত্তর

উদাহরণ 4. কোন সংখ্যার দুই-সপ্তমাংশের সহিত 4·2 যোগ করার পর যোগফলকে 4·1 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হয় 2। সংখ্যাটি কত ?

মনে করা যাক সংখ্যাটি $=x$

সুতরাং প্রশ্নানুসারে

$(x.\frac{2}{7}+4{\cdot}2)\div4{\cdot}1=2$

অর্থাৎ $\dfrac{\frac{2}{7}x+4{\cdot}2}{4{\cdot}1}=2$

অথবা, $\frac{2}{7}x+4{\cdot}2=8{\cdot}2$

অথবা, $\frac{2}{7}x=8{\cdot}2-4{\cdot}2=4$

অথবা, $x=4\times\frac{7}{2}=14$

$\therefore$ সংখ্যাটি $=14$	উত্তর

উদাহরণ 5. দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দু'টির যোগফল 8 এবং সংখ্যাটি থেকে 36 বিয়োগ করলে সংখ্যাটি উল্টে যায়।

মনে করা যাক

সংখ্যাটির দশকের অঙ্ক $=x$

সুতরাং এককের অঙ্ক $=8-x$

* $\therefore$ সংখ্যাটির মান $=10x+(8-x)$

$$=10x+(8-x)$$

সংখ্যাটি উল্টে গেলে দশকের অঙ্ক হয় $8-x$

এবং এককের অঙ্ক হয় x

সুতরাং ইহার মান $=10(8-x)+x$

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে

$$10x+(8-x)-36=10(8-x)+x$$

অথবা $10x+8-x-36=80-10x+x$

অথবা $10x-x+10x-x=80-8+36$

অথবা $18x=108$

অথবা $x=\frac{108}{18}=6$

$\therefore$ দশকের অঙ্ক $=6$

এককের অঙ্ক $=8-6=2$

সুতরাং রাশিটি $=62$	উত্তর

(2) ভগ্নাংশ বিষয়ক প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 6. কোনও ভগ্নাংশের হর, লব অপেক্ষা 4 বেশী। লবের সংগে 11 যোগ ও হর থেকে 1 বিয়োগ করলে নূতন ভগ্নাংশটি মূল ভগ্নাংশের অনোন্যক (Reciprocal) এর সমান হয়।

মনে করা যাক

ভগ্নাংশের লব $=x$

সুতরাং হর $=x+4$

---

* যেমন $35=3\times10+5$ আবার $93=9\times10+3$ ইত্যাদি।

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{x+4}$

এবং এর অনোন্যক $\frac{x+4}{x}$

অতএব প্রশ্নানুসারে

$$\frac{x+11}{(x+4)-1} = \frac{x+4}{x}$$

অথবা, $\frac{x+11}{x+3} = \frac{x+4}{x}$

অথবা, $\frac{x+11}{x+3} - 1 = \frac{x+4}{x} - 1$ (উভয় পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে)

অথবা, $\frac{x+11-x-3}{x+3} = \frac{x+4-x}{x}$

অথবা, $\frac{8}{x+3} = \frac{4}{x}$

অথবা, $8x = 4x + 12$ (উভয় পক্ষকে $x(x+3)$ দিয়ে গুণ করে)

অথবা, $8x - 4x = 12$

অথবা, $4x = 12$

অথবা, $x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $= \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$ উত্তর

(3) বণ্টন বিষয়ক প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 7. রাম, শ্যাম ও যদুর মধ্যে 175 টাকা এমন ভাবে ভাগ করে দাও যে রাম শ্যামের চেয়ে 20 টাকা বেশী পায় আর যদু রামের অর্ধেক পায়।

মনে করা যাক রাম x টাকা পায়

সুতরাং শ্যাম $(x-20)$ টাকা পায় আর যদু $\frac{x}{2}$ টাকা পায়।

অতএব প্রশ্নানুসারে, $x + (x-20) + \frac{x}{2} = 175$

অথবা, $x+x+\frac{x}{2}=175+20$

অথবা, $\frac{5}{2}.x=195$

অথবা, $x=\frac{195\times 2}{5}=78$

সুতরাং

রাম 78 টাকা পায়
শ্যাম $78-20=58$ টাকা পায়
যদু $\frac{78}{2}=39$ টাকা পায়।

উত্তর

উদাহরণ 8. 60 জন বালক বালিকার মধ্যে প্রত্যেক বালককে 5 পয়সা ও প্রত্যেক বালিকাকে 15 পয়সা করে দিলে মোট 4 টাকা খরচ হয়। বালক ও বালিকার সংখ্যা বের কর।

মনে করা যাক

বালকের সংখ্যা $=x$

সুতরাং বালিকার সংখ্যা $=60-x$

$\therefore$ বালকেরা পায় $5x$ পয়সা $=\frac{5x}{100}$ টাকা

আর বালিকারা পায় $15(60-x)$ পয়সা $=\frac{15(60-x)}{100}$ টাকা

অতএব প্রশ্নানুসারে

$\frac{5x}{100}+\frac{15(60-x)}{100}=4$ অথবা, $\frac{5x+15(60-x)}{100}=4$

অথবা, $5x+15(60-x)=400$

অথবা, $5x+900-15x=400$

অথবা, $5x-15x=400-900$

অথবা, $-10x=-500$

অথবা, $x=\frac{-500}{-10}=50$

সুতরাং

বালকের সংখ্যা $=50$
বালিকার সংখ্যা $=60-50=10$

উত্তর

(4) বয়স বিষয়ক প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 9. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 59 বৎসর, 5 বৎসর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে তাদের বয়স কত ?

মনে করা যাক

বর্তমানে পুত্রের বয়স $= x$ বৎসর

সুতরাং পিতার বয়স $= (59 - x)$ বৎসর

5 বৎসর পর : পুত্রের বয়স $= x + 5$ বৎসর

পিতার বয়স $= 59 - x + 5$ বৎসর

$= 64 - x$ বৎসর

অতএব প্রশ্নানুসারে

$64 - x = 2(x+5)$

অথবা, $64 - x = 2x + 10$

অথবা, $-x - 2x = 10 - 64$

অথবা, $-3x = -54$

অথবা, $x = \frac{-54}{-3} = 18$

সুতরাং

বর্তমানে পুত্রের বয়স $= 18$ বৎসর	
আর পিতার বয়স $= 59 - 18 = 41$ বৎসর	উত্তর

উদাহরণ 10. অনিতা কবিতাকে বলল "এখন তোমার বয়স যত বৎসর আমার বয়স যখন তত বৎসর ছিল তখন তোমার বয়স আমার বর্তমান বয়সের তিন ভাগের এক ভাগ।" এখন উভয়ের বয়সের সমষ্টি 75 বৎসর হ'লে প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত ?

মনে করা যাক

কবিতার বর্তমান বয়স $= x$ বৎসর

তাহ'লে অনিতার বর্তমান বয়স $= (75 - x)$ বৎসর

$\therefore$ $(75 - x) - x$ বা $(75 - 2x)$ বৎসর আগে অনিতার বয়স ছিল x বৎসর।

তখন, কবিতার বয়স ছিল $x - (75 - 2x)$ বৎসর $= (x - 75 + 2x)$ বৎসর

$= (3x - 75)$ বৎসর

অতএব প্রশ্নানুসারে

$$3x-75=\frac{1}{3}(75-x)$$

অথবা, $9x-225=75-x$

অথবা, $10x=300$

অথবা, $x=30$

∴ কবিতার বর্তমান বয়স $=30$ বৎসর
এবং অনিতার বর্তমান বয়স $=75-30=45$ বৎসর — **উত্তর**

(5) সময় ও দূরত্ব বিষয়ক প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 11. একজন লোক বাসে ও ট্রেনে 8 ঘণ্টা ভ্রমণ করে মোট 420 কিলোমিটার পথ যায়। বাসের গতিবেগ ঘণ্টায় 40 কিলোমিটার ও ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় 60 কিলোমিটার হ'লে লোকটি ট্রেনে কতটা পথ গিয়েছিল ?

মনে করা যাক

লোকটি ট্রেনে x ঘণ্টা ধরে যায়।

সুতরাং সে বাসে $(8-x)$ ঘণ্টা ধরে যাবে।

∴ ট্রেনে অতিক্রান্ত পথ $=60x$ কি মি.

ও বাসে অতিক্রান্ত পথ $=40(8-x)$ কি.মি.।

অতএব প্রশ্নানুসারে

$$60x+40(8-x)=420$$

অথবা, $60x+320-40x=420$

অথবা, $20x=420-320=100$

অথবা, $x=5$

∴ লোকটি ট্রেনে 5 ঘণ্টা ও বাসে $8-5=3$ ঘণ্টা ধরে যায়।

সুতরাং লোকটি ট্রেনে $60\times 5=300$ কি.মি. পথ গেছে। — **উত্তর**

গতিবেগ সম্বন্ধীয় কয়েকটি তত্ত্ব।

A. যদি স্রোতের অনুকূলে কোনও নৌকা বা সাঁতারু যায় তবে তার গতিবেগ বেড়ে যায় এবং এই গতিবেগ স্থির জলে তাদের নিজেদের গতিবেগ ও স্রোতের গতিবেগের যোগফলের সমান হয়।

B. যদি স্রোতের প্রতিকূলে কোনও নৌকা বা সাঁতারু যায় তবে তার গতিবেগ কমে যায় আর এই গতিবেগ স্থির জলে তাদের গতিবেগ ও স্রোতের গতিবেগ এদের বিয়োগফলের সমান হয়।

C. একটা লোক বা স্তম্ভকে অতিক্রম করতে হ'লে একটা ট্রেনকে আপেক্ষিক বেগে তার নিজের দৈর্ঘ্যের সমান পথ যেতে হয়।

D. একটা প্লাটফর্ম (বা অন্য একটা ট্রেনকে) অতিক্রম করতে হ'লে একটা ট্রেনকে আপেক্ষিক বেগে উভয়ের সমষ্টির দৈর্ঘ্যের সমান পথ যেতে হয়।

E. একই সরলরেখায় একই দিকে দু'টি বস্তু চললে আপেক্ষিক গতিবেগ উহাদের গতিবেগের বিয়োগফলের সমান হয়।

F. একই সরলরেখায় দুই বিপরীত দিকে দু'টি বস্তু চললে তাদের আপেক্ষিক গতিবেগ উভয়ের গতিবেগের সমষ্টির সমান হয়।

উদাহরণ 12. স্থির জলে একখানি নৌকার গতি ঘন্টায় 7·5 কিলোমিটার। স্রোতের অনুকূলে 80 কি.মি. পথ যেতে ও স্রোতের প্রতিকূলে 40 কিলোমিটার পথ যেতে একই সময় লাগলে স্রোতের গতিবেগ কত ?

মনে করা যাক স্রোতের বেগ ঘন্টায় x কিলোমিটার

∴ স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ ঘন্টায় $(7\cdot5+x)$ কি.মি.

ও স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ ঘন্টায় $(7\cdot5-x)$ কি.মি.

স্রোতের অনুকূলে 80 কি.মি. পথ যেতে সময় লাগে $\dfrac{80}{7\cdot5+x}$ ঘন্টা।

স্রোতের প্রতিকূলে 40 কি.মি. পথ যেতে সময় লাগে $\dfrac{40}{7\cdot5-x}$ ঘন্টা।

∴ প্রশ্নানুসারে

$$\frac{80}{7\cdot5-x}=\frac{40}{7\cdot5-x}$$

উভয় পক্ষকে 40 দিয়ে ভাগ করে

$$\frac{2}{7\cdot5+x}=\frac{1}{7\cdot5-x}$$

অথবা, $7\cdot5+x=15-2x$

অথবা, $3x=15-7\cdot5=7\cdot5$

অথবা, $x=2\cdot5$

∴ স্রোতের গতিবেগ ঘন্টায় 2·5 কিলোমিটার। উত্তর

উদাহরণ 13. একটি ট্রেন 30 সেকেণ্ডে একটি প্লাটফর্ম অতিক্রম করে। ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় 60 কি.মি. ও তার দৈর্ঘ্য 200 মিটার হ'লে, প্লাটফর্মের দৈর্ঘ্য কত ?

মনে করা যাক প্লাটফর্মের দৈর্ঘ্য $= x$ মিটার

$\therefore$ প্লাটফর্মের দৈর্ঘ্য ও ট্রেনের দৈর্ঘ্যের যোগফল $= (x+200)$ মিটার

$$= \frac{x+200}{1000} \text{ কি.মি.}$$

প্লাটফর্ম অতিক্রম করার সময় $= 30$ সে. $= \frac{1}{2}$ মি. $= \frac{1}{120}$ ঘণ্টা

সুতরাং সর্তানুসারে,

$$\frac{x+200}{1000} = \frac{1}{120} \times 60$$

অথবা, $x+200 = \frac{60 \times 1000}{120} = 500$

অথবা, $x = 300$

$\therefore$ প্লাটফর্মের দৈর্ঘ্য $= 300$ মিটার	উত্তর

উদাহরণ 14. দুইজন মহাকাশচারি A ও B দুইটি বিভিন্ন মহাকাশযানে একই সমতলে একই দিকে বৃত্তাকার পথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করছেন। A, 6 ঘণ্টায় আর B, 15 ঘণ্টায় একবার ক'রে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করছেন। কলকাতার স্থানীয় সময় বেলা 10 টায় মহাকাশচারি B দেখলেন যে A ঠিক তাঁর দিক থেকে পৃথিবীর উল্টো দিকে আছেন। কখন তাঁরা আবার একজন আর একজনের উপরে থাকবেন ?

মনে করা যাক x ঘণ্টা পরে তাঁরা প্রশ্নে উল্লিখিত অবস্থায় আসবেন। অতএব ঐ সময় A, B এর থেকে 2 সমকোণ পরিমিত কোণ বেশী ঘুরবে।

A, 6 ঘণ্টায় আর B, 15 ঘণ্টায় একপাক অর্থাৎ 4 সমকোণ পরিমিত কোণ ঘোরে।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে,

$$\tfrac{4}{6}.x - \tfrac{4}{15}.x = 2$$

উভয় পক্ষকে 30 দিয়ে গুণ ক'রে

অথবা, $20x - 8x = 60$

অথবা, $12x = 60$

অথবা, $x = 5$

∴ আরও 5 ঘন্টা পরে তাঁরা প্রশ্নে উল্লিখিত অবস্থায় আসিবেন।

অর্থাৎ

কলিকাতা সময় বিকাল 3 টার সময় তাঁরা একে অপরের উপরে থাকবেন।	উত্তর

(6) ক্ষেত্রফল বিষয়ক প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 15. কোনও ঘরের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কমালে আর প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ঘরের ক্ষেত্রফল 15 বর্গ মিটার বেড়ে যায়। ঘরটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের চেয়ে 15 মিটার বেশী হ'লে, ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বের কর।

মনে করা যাক ঘরটির প্রস্থ $= x$ মিটার

সুতরাং এর দৈর্ঘ্য $= (x+15)$ মিটার

∴ এর ক্ষেত্রফল $= x(x+15)$ বর্গ মিটার

এবং প্রশ্নের বর্ণিত উপায়ে দৈর্ঘ্যে ও প্রস্থের পরিবর্তন ঘটিয়ে যে নূতন ঘরটি হয় তার ক্ষেত্রফল $= (x+4)(x+15-5)$ বা $(x+4)(x+10)$ বর্গ মিটার।

∴ সর্তানুসারে

$$(x+4)(x+10) - x(x+15) = 15$$

অথবা, $x^2 + 14x + 40 - x^2 - 15x = 15$

অথবা, $-x + 40 = 15$

অথবা, $x = 40 - 15 = 25$

∴ ঘরটির প্রস্থ $= 25$ মিটার ও দৈর্ঘ্য $= 25 + 15 = 40$ মিটার।	উত্তর

(7) লাভ-ক্ষতি সংক্রান্ত প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 16. একজন ব্যবসায়ী 10,000 টাকা দু'টি বিভিন্ন ব্যবসায়ে লগ্নী করে একটিতে 4% লাভ ও অন্যটিতে 5% ক্ষতি করায় মোটের উপর তার 1·3% লাভ হ'লে কোন্ খাতে কত টাকা লগ্নী করা হয়েছিল ?

মনে করা যাক,

যে লগ্নীতে লাভ হয়েছে তার টাকার পরিমাণ $= x$ টাকা।

$\therefore$ অপর লগ্নীতে টাকার পরিমাণ $=(10,000-x)$ টাকা।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে

$$\frac{4}{100}x-\frac{5}{100}.(10,000-x)=\frac{1\cdot 3}{100}\times 10,000$$

উভয় পক্ষকে 100 দিয়ে গুণ করে

অথবা, $4x-50,000+5x=13,000$

অথবা, $9x=63,000$

অথবা, $x=7,000$

$\therefore$ লাভজনক ব্যবসায়ে লগ্নীর পরিমাণ $=7,000$ টাকা ;
আর অন্যটিতে লগ্নীর পরিমাণ $=10,000-7,000=3,000$ টাকা।

উত্তর

উদাহরণ 17. একটি গরু বিক্রি করে 16% ক্ষতি হ'ল। যদি গরুটির ক্রয়মূল্য 10% কম হ'ত আর বিক্রয়মূল্য 22 টাকা 50 পয়সা বেশি হ'ত তবে 10% লাভ হ'ত। গরুটির ক্রয় মূল্য কত ?

মনে করা যাক গরুটির ক্রয়মূল্য $=x$ টাকা।

$\therefore$ গরুটির বিক্রয়মূল্য $=\frac{100-16}{100}.x$ বা $\frac{84}{100}x$ টাকা।

২য় বারে ক্রয়মূল্য হ'ত $\frac{90}{100}x$ টাকা ; 10% কম ব'লে।

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য হ'ত $\frac{110}{100}\times\frac{90}{100}x$ টাকা ; 10% লাভ হয়েছে ব'লে।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে

$$\frac{110}{100}\times\frac{90}{100}x=\frac{84}{100}x+22\cdot 50$$

অথবা, $\frac{99}{100}x-\frac{84}{100}x=\frac{2250}{100}$

অথবা, $99x-84x=2250$

অথবা, $15x=2250$

অথবা, $x=150$

$\therefore$ গরুটির ক্রয়মূল্য $=150$ টাকা। উত্তর

(8) মিশ্রণ সম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 18. একজন দুধ বিক্রেতা 1 টাকা লিটার দরে খাঁটি দুধ কিনে কিছু জল মিশিয়ে মিশ্রিত দুধ 80 পয়সা লিটার দরে বিক্রি করল। এ'তে তার 20% লাভ হ'ল। মিশ্রিত দুধে শতকরা কত পরিমাণ জল আছে ?

মনে করা যাক মিশ্রিত দুধে জলের পরিমাণ $x\%$।

$\therefore$ 1 লিটার মিশ্রিত দুধের মধ্যে জল $\frac{x}{100}$ লিটার

আর খাঁটি দুধ $1-\frac{x}{100}$ লিটার

সুতরাং 1 লিটার মিশ্রিত দুধের প্রকৃত ক্রয়মূল্য $\left(1-\frac{x}{100}\right)$ টাকা।

সে এই 1 লিটার মিশ্রিত দুধ 80 পয়সা বা $\frac{8}{10}$ টাকায় বেচে।

$\therefore$ $\frac{8}{10}-\left(1-\frac{x}{100}\right)=\frac{x-20}{100}$ টাকা লাভ হয়।

কিন্তু ক্রয়মূল্য $=1-\frac{x}{100}=\frac{100-x}{100}$ টাকা

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে

$$\frac{\frac{x-20}{100}}{\frac{100-x}{100}}=\frac{20}{100}$$

অথবা, $\frac{x-20}{100-x}=\frac{1}{5}$

অথবা, $5x-100=100-x$

অথবা, $6x=200$

অথবা, $x=33\frac{1}{3}$

$\therefore$ মিশ্রিত দুধে জলের পরিমাণ $33\frac{1}{3}\%$। উত্তর

উদাহরণ 19. একজন দোকানদার 5 টাকা কিলোগ্রাম দরের ও 6 টাকা কিলোগ্রাম দরের দুই প্রকারের সরষের তেল কিনে এমনভাবে মিশ্রণ করল যে মিশ্রিত তেল 5·94 টাকা কিলোগ্রাম দরে বিক্রয় করায় তার 10% লাভ হ'ল। তাহলে ঐ দোকানদার কি অনুপাতে মিশ্রণ করেছিল ?

মনে করা যাক,

দোকানদার 5 টাকা দরের তেলের সংগে 6 টাকা দরের তেল $x : 1$ অনুপাতে মেশায়। অর্থাৎ x কি. গ্রা. খারাপ তেল থাকলে 1 কি. গ্রা. ভাল তেল থাকবে।

$\therefore$ মোট $(x+1)$ কি. গ্রা. মিশ্রণের ক্রয়মূল্য হ'বে $(5x+6)$ টাকা।
আর এর বিক্রয়মূল্য হ'বে $5{\cdot}94(x+1)$ টাকা।
প্রদত্ত সর্তানুসারে

$$\frac{5{\cdot}94(x+1)-(5x+6)}{5x+6}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$$

অথবা, $59{\cdot}4(x+1)-10(5x+6)=5x+6$

অথবা, $59{\cdot}4x-50x-5x=-59{\cdot}4+60+6$

অথবা, $4{\cdot}4x=6{\cdot}6$

অথবা, $x=\frac{6{\cdot}6}{4{\cdot}4}=\frac{3}{2}$

অর্থাৎ $x : 1=\frac{3}{2} : 1\equiv 3 : 2$

$\therefore$ মিশ্রণে খারাপ তেল ও ভাল তেলের অনুপাত 3 : 2 | উত্তর

(9) সময় ও কার্য্য বিষয়ক প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 20. A একাকী 12 দিনে একটি বাড়ী তৈরী করতে পারে। কিন্তু B এর সাহায্য নিয়ে সে ঐ বাড়ীটি 8 দিনে করতে পারে। তবে B একাকী বাড়ীটি কত দিনে তৈরী করতে পারবে ?

মনে করা যাক, B একাকী বাড়ীটি তৈরী করতে x দিন সময় নেয়।
প্রশ্নানুসারে A ও B এর 8 দিনের কাজের সাহায্যে বাড়ীটি সম্পূর্ণ হয়।
সুতরাং

$$\frac{8}{12}+\frac{8}{x}=1$$

অথবা, $\frac{8}{x}=1-\frac{8}{12}=\frac{4}{12}$

অথবা, $4x=96$

অথবা, $x=24$

$\therefore$ B একাকী 24 দিনে বাড়ীটি সমাধা করতে পারে। | উত্তর

উদাহরণ 21. একটি ইঞ্জিন তৈরী করার কারখানায় কয়েকটি ইঞ্জিন 15 দিনে তৈরী করার জন্য চুক্তি করা হ'ল। কর্মীরা বেতন বেশী পাওয়ায় উৎসাহিত হয়ে তাদের কাজের গতি বাড়িয়ে দিল। ফলে দিনে 2টি করে বেশী ইঞ্জিন তৈরী হ'তে লাগল। এতে নির্দ্দিষ্ট সময়ের 2 দিন আগেই যতগুলি ইঞ্জিন তৈরী করার কথা ছিল তার থেকে আরও 6টি বেশী ইঞ্জিন তৈরী করে ফেলল। কতগুলি ইঞ্জিন তৈরী করার চুক্তি হয়েছিল ?

মনে করা যাক আগে দিনে xটি ইঞ্জিন তৈরী হ'ত এবং $15x$টি ইঞ্জিনের চুক্তি করা হ'য়েছিল। [যেহেতু 15 দিনে নির্মিত ইঞ্জিনের সংখ্যাই হ'ল মোট ইঞ্জিন সংখ্যা।]

সুতরাং সর্তানুসারে কাজের গতি বাড়ার ফলে

$13.(x+2)=15x+6$

অথবা, $13x+26=15x+6$

অথবা, $2x=20$

অথবা, $x=10$

অথবা, $15x=150$

∴ 150টি ইঞ্জিন তৈরী করার চুক্তি হয়েছিল। উত্তর

উদাহরণ 22. A ও B আলাদা আলাদাভাবে কাজ করে যথাক্রমে 12 দিনে ও 24 দিনে একটি কাজ সমাধা করতে পারে। দু'জন একত্রে কাজটি আরম্ভ করল, কিন্তু কাজ শেষ হবার 6 দিন আগেই A চলে গেল। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল ?

মনে করা যাক কাজটি x দিনে শেষ হয়েছিল।

∴ A, $(x-6)$ দিন ও B x দিন কাজ করেছে।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে

$$\frac{1}{12}.(x-6)+\frac{1}{24}.x=1$$

অথবা, $2x-12+x=24$

অথবা, $3x=24+12=36$

অথবা, $x=12$

∴ কাজটি 12 দিনে শেষ হয়েছিল। উত্তর

(10) নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক প্রশ্ন

উদাহরণ 23. একটি চৌবাচ্চায় দু'টি নল আছে। তাদের একটি দিয়ে খালি চৌবাচ্চা 4 ঘণ্টায় পূর্ণ হয় আর অপরটি দিয়ে জল বের করার ব্যবস্থা আছে। এক সংগে উভয় নল খুলে দেওয়ায় দেখা গেল চৌবাচ্চাটি 6 ঘণ্টায় ভর্তি হয়। তাহ'লে কেবল দ্বিতীয় নলটি খুলে রাখলে ভর্তি চৌবাচ্চা কতক্ষণে খালি হবে ?

মনে করা যাক দ্বিতীয় নল দিয়ে ভর্ত্তি চৌবাচ্চা x ঘণ্টায় খালি হয়। প্রথম নল দিয়ে 6 ঘণ্টায় $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ অংশ জল ঢোকে।

দ্বিতীয় নল দিয়ে 6 ঘণ্টায় $\dfrac{6}{x}$ অংশ জল বের হয়

∴ প্রশ্নানুসারে

$$\frac{3}{2}-\frac{6}{x}=1$$

অথবা, $\dfrac{6}{x}=\dfrac{3}{2}-1$

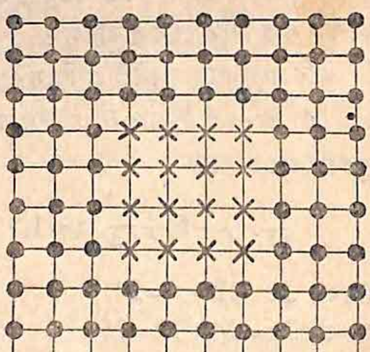
অথবা, $\dfrac{6}{x}=\dfrac{1}{2}$

অথবা, $x=12$

∴ দ্বিতীয় নল দিয়ে ভর্তি চৌবাচ্চা 12 ঘণ্টায় খালি হবে। | উত্তর

(11) শূন্য-গর্ভ বর্গ-বিষয়ক প্রশ্ন

শূন্য গর্ভ বর্গ : (Hollow square) পাশের ছবিতে 84 জন লোককে (● চিহ্ন দিয়ে লোক বোঝান হয়েছে) এমন ভাবে চৌকোভাবে সাজান হয়েছে যে প্রত্যেক দিকেই 10 জন করে লোক আছে আর মধ্যে কিছুটা অংশে কোনও লোক নেই। অর্থাৎ সেই জায়গাটা ফাঁকা থেকে গেছে। প্রত্যেক সারির যে সব জায়গা ফাঁকা থেকে গেছে সেগুলো X চিহ্ন দিয়ে দেখান হয়েছে।



এই ছবিতে একটি সম্পূর্ণ বর্গের $10\times10=100$টি জায়গার মধ্যে 84টি জায়গায় 84 লোক রাখা হয়েছে আর ঠিক মাঝখানে $4\times4=16$ টি জায়গা ফাঁকা আছে। আরও দেখা যায়

যে কোন দিক থেকে 3 সারি লোক পার হ'লে তবে মধ্যের ফাঁকা জায়গায় যাওয়া যায়। অর্থাৎ মধ্যের ফাঁকা জায়গার চারদিকেই তিন সারি ক'রে লোক আছে। এরূপভাবে সাজানো অবস্থাকে 3 গভীরতা বিশিষ্ট একটি শূন্য গর্ভ বর্গ বলে। এখন সম্মুখসারির লোক সংখ্যা x, আর গভীরতা a হ'লে মোট লোকের প্রয়োজন হ'বে $x^2-(x-2a)^2$।

উদাহরণ 24. একজন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁর অধীনস্থ সৈন্যদের নিয়ে 6 গভীরতা বিশিষ্ট একটি অথবা 9 গভীরতা বিশিষ্ট অপর একটি শূন্য-গর্ভ বর্গ রচনা করতে পারেন ; কিন্তু তাতে প্রথম বারের সামনের সারির সৈন্য সংখ্যা থেকে দ্বিতীয় বারের সামনের সারির সৈন্য সংখ্যা 10 কম। ঐ দলে মোট কত সৈন্য ছিল।

মনে করা যাক প্রথমবার সম্মুখ সারির সৈন্য সংখ্যা $=x$

$\therefore$ দ্বিতীয়বার " " " $=x-10$

যেহেতু একই সৈন্যদল দু'রকম ভাবে সাজান হয়েছে উভয় ক্ষেত্রেই সৈন্য সংখ্যা সমান।

$\therefore \quad x^2-(x-2\times 6)^2=(x-10)^2-\{(x-10)-2\times 9\}^2$

অথবা, $24x-144=36x-684$

অথবা, $12x=684-144$

অথবা, $12x=540$

অথবা, $x=45$

$\therefore$ সৈন্য সংখ্যা $=45^2-(45-12)^2=45^2-33^2=936$

$\therefore$ নির্ণেয় সৈন্য সংখ্যা $=936$ উত্তর

(**12**) **ঘড়ি ও সময় সম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী**

ঘড়ির কাঁটাগুলি যে তলের উপর ঘোরে তাকে ঘড়ির ডায়াল (dial) বলে। ঘড়ির ডায়ালকে 12টি দাগ দিয়ে সমান ভাগ করে প্রত্যেক দাগের উপর যথাক্রমে 1, 2, 3, 4……12 এই সংখ্যাগুলি লেখা থাকে। আবার এদের মধ্যে পরপর যে কোন দু'টি দাগের মধ্যের অংশটি সমান 5 ভাগে ভাগ করা থাকে, অর্থাৎ সমগ্র ডায়ালটি 60টি সমান ভাগে ভাগ হ'য়ে যায়, এদের প্রত্যেক ভাগকে এক মিনিট ঘর বলে। সুতরাং 1 ঘন্টা সময়ে ঘন্টার কাঁটা

(ছোট কাঁটা) 5 মিনিট ঘর যায় আর মিনিটের কাঁটা (বড় কাঁটা) 60 মিনিট ঘর যায়। অর্থাৎ মিনিটের কাঁটা 1 মিনিটে 1 মিনিট ঘর যায় আর ঘণ্টার কাঁটা 1 মিনিটে $\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$ মিনিট ঘর (বা 1 মিনিট ঘরের $\frac{1}{12}$ অংশ) যায়।

ঘড়ির কাঁটা দু'টির বিভিন্ন অবস্থান

(1) ঘড়ির কাঁটা দু'টি পরস্পর মিলিত হ'লে তাদের মধ্যে কোন ব্যবধান থাকে না অর্থাৎ ব্যবধান শূন্য মিনিট-ঘর হয়।

(2) ঘড়ির কাঁটা দু'টি এক সরলরেখায় থাকলে তাদের মধ্যে ব্যবধান শূন্য মিনিট-ঘর কিংবা 30 মিনিট-ঘর হয়।

(3) ঘড়ির কাঁটা দু'টি পরস্পর লম্বভাবে থাকলে মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 15 মিনিট-ঘর আগে বা পিছনে থাকবে কিংবা 45 মিনিট-ঘর আগে বা পিছনে থাকবে।

(4) ঘড়ির কাঁটা দু'টি পরস্পর বিপরীতমুখী হ'লে তাদের মধ্যে 45 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকে।

উদাহরণ 25. 3টা ও 4টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দু'টি কখন একত্রিত হবে ?

3টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার চেয়ে 15 মিনিট ঘর পিছনে থাকে। কাঁটা দু'টিকে পরস্পর মিলিত হ'তে হ'লে তাদের মধ্যে ব্যবধান থাকবে না, অর্থাৎ মিনিটের কাঁটাকে ঘণ্টার কাঁটার চেয়ে 15 মিনিট-ঘর বেশী যেতে হবে। মনে করা যাক্ 3টা বেজে x মিনিট পরে কাঁটা দুটি মিলিত হয়। ঐ সময়ে মিনিটের কাঁটা x মিনিট-ঘর আর ঘণ্টার কাঁটা $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর যায়।

$\therefore \quad x-\frac{x}{12}=15$

অথবা, $\frac{11}{12}x=15$

অথবা, $x=15\times\frac{12}{11}$

অথবা, $x=16\frac{4}{11}$

$\therefore$ 3টা বেজে $16\frac{4}{11}$ মিনিটের সময় কাঁটা দু'টি একত্রিত হ'বে। উত্তর

উদাহরণ 26. 4টা ও 5টার সময় ঘড়ির কাঁটা দুটি কখন বিপরীত-মুখী হবে ?

4টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার চেয়ে 20 মিনিট-ঘর পিছনে থাকে। কাঁটা দু'টি বিপরীতমুখী হ'লে তাদের মধ্যে ব্যবধান হবে 30 মিনিট-ঘর। সুতরাং মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার চেয়ে $20+30=50$ মিনিট-ঘর বেশী গেলে তারা পরস্পর বিপরীতমুখী হবে। মনে করা যাক্ 4টা বেজে x মিনিটের সময় কাঁটা দু'টি বিপরীতমুখী হয়।

$\therefore \quad x-\frac{x}{12}=50$

অথবা, $\frac{11}{12}x=50$

অথবা, $x=50\times\frac{12}{11}$

অথবা, $x=54\frac{6}{11}$

$\therefore$ 4টা বেজে $54\frac{6}{11}$ মিনিটে কাঁটা দু'টি বিপরীতমুখী হবে।	উত্তর

উদাহরণ 27. 7টা ও 8টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দু'টি কখন এক সরলরেখায় থাকবে ?

7টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার চেয়ে 35 মিনিট ঘর পিছনে থাকে। কাঁটা দু'টি এক সরলরেখায় থাকলে তাদের মধ্যে ব্যবধান হ'বে 30-মিনিট ঘর কিংবা 0 মিনিট ঘর। সুতরাং মিনিটের কাঁটাকে ঘণ্টার কাঁটার চেয়ে আরও 5 মিনিট ঘর কিংবা 35 মিনিট-ঘর বেশী যেতে হ'বে। মনে করা যাক 7টা বেজে x মিনিটে কাঁটা দু'টি এক সরলরেখায় হয়। অতএব

প্রথম ক্ষেত্রে

$x-\frac{x}{12}=5$

আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে

$x-\frac{x}{12}=35$

সমীকরণ দু'টি সমাধান ক'রলে আমরা পাই,

প্রথম ক্ষেত্রে $x=5\frac{5}{11}$ আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $x=38\frac{2}{11}$

$\therefore$ 7টা বেজে $5\frac{5}{11}$ মিনিটে বা 7টা বেজে $38\frac{2}{11}$ মিনিটে কাঁটাদুটি এক সরলরেখায় থাকবে।	উত্তর

উদাহরণ 28. 10 টা ও 11টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দু'টি কখন এক সমকোনে থাকবে ?

10টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘন্টার কাঁটার চেয়ে 10 মিনিট-ঘর এগিয়ে আছে। কাঁটা দু'টি এক সমকোনে থাকলে তাদের মধ্যে ব্যবধান থাকে 15 মিনিট-ঘর বা 45 মিনিট-ঘর। সুতরাং মিনিটের কাঁটাকে ঘন্টার কাঁটার চেয়ে হয় $15-10=5$ মিনিট-ঘর নতুবা $45-10=35$ মিনিট ঘর বেশী যেতে হবে। মনে করা যাক 10টা বেজে x মিনিটে কাঁটা দু'টি সমকোনে থাকে। অতএব

হয় $x-\frac{x}{12}=5$ নতুবা $x-\frac{x}{12}=35$

সমাধান ক'রে পাই $x=5\frac{5}{11}$ বা $38\frac{2}{11}$

∴ 10টা বেজে $5\frac{5}{11}$ মিনিটে ও 10 টা বেজে $38\frac{2}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুটি পরস্পর সমকোনে থাকবে। উত্তর

§ 2·5 প্রশ্নমালা 8

1. এমন একটি সংখ্যা বের কর যাকে তার চেয়ে 12 কম এরূপ একটি সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 5 হয়।
2. দু'টি সংখ্যার যোগফল 49 ; ছোট সংখ্যাটিকে 5 দিয়ে গুণ করলে বড় সংখ্যাটির দ্বিগুণ হয়। সংখ্যা দু'টি বের কর।
3. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুটির যোগফল 10 ; সংখ্যাটির এককের অঙ্ক থেকে 2 বিয়োগ ও দশকের অঙ্কে 3 যোগ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় সেটা আগের সংখ্যার দ্বিগুণ। সংখ্যাটি কত ?
4. কোন্ সংখ্যার তিন-পঞ্চমাংশের সহিত 27 যোগ করলে 60 হয়।
5. 25কে এমন দু'ভাগে ভাগ কর যেন, ঐ দু'টি অংশের বর্গের অন্তর 125 হয়।
6. এমন তিনটি পর পর পূর্ণ সংখ্যা বের কর যাদের যোগফল 84 হয়।
7. এমন তিনটি পর পর বিজোড় সংখ্যা বের কর যাদের যোগফল 105 হয়।
8. এমন কোনও পর পর দু'টি জোড় সংখ্যা বের করা যায় কি যাদের যোগফল 52 হয় ?

9. দুই অঙ্কের একটি সংখ্যার অঙ্ক দু'টির যোগফল 14 ; সংখ্যাটি থেকে 36 বিয়োগ করলে সেটি উল্টে যায়।

10. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশকের অঙ্ক এককের অঙ্কের 3 গুণ। অঙ্ক দু'টি উল্টে দিলে নতুন সংখ্যাটি পূর্বের সংখ্যার চেয়ে 54 কম হয়। সংখ্যাটি কত ?

11. তিন অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককের অঙ্ক দশকের অঙ্কের চেয়ে 3 বেশী আবার দশকের অঙ্ক শতকের অঙ্কের চেয়ে 3 বেশী। সংখ্যাটিতে 42 যোগ করলে যোগফল সংখ্যাটি অঙ্ক তিনটির যোগফলের 20 গুণ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

12. একটি ভগ্নাংশের লব হরের চেয়ে 3 কম। লবকে 3 দিয়ে গুণ আর হরের সংগে 4 যোগ করলে নূতন ভগ্নাংশটি $\frac{9}{8}$ হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

13. একটি ভগ্নাংশের হর লবের থেকে 6 বেশী। লবের সঙ্গে 17 যোগ আর হর থেকে 1 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি উল্টে যায়। ভগ্নাংশটি কত ?

14. একটি ভগ্নাংশের লব ও হরের যোগফল 22 ; আর লব ও হরের প্রত্যেকের সংগে 3 যোগ করলে নতুন ভগ্নাংশটি $\frac{5}{7}$ এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

15. একটি ভগ্নাংশের লব ও হরের যোগফল 8 ; লব ও হর প্রত্যেকটি থেকে 1 বিয়োগ করলে নতুন ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। পূর্বের ভগ্নাংশটি বের কর।

16. কোন ভগ্নাংশের লবের চেয়ে হর 5 বেশী। লবের সঙ্গে 8 যোগ করলে নতুন ভগ্নাংশের মান 1 বেড়ে যায়। ভগ্নাংশটি কত ?

17. কোন ভগ্নাংশের লব ও হরের যোগফল 15 এবং লবের সংগে 7 যোগ করলে নতুন ভগ্নাংশের মান $\frac{1}{2}$ বেড়ে যায়। ভগ্নাংশটি কত ?

18. রাম, শ্যাম ও যদুর মধ্যে 500 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন শ্যাম রামের টাকার $1\frac{1}{2}$ গুণ আর যদু রামের টাকার দ্বিগুণের থেকে আরও 5 টাকা বেশী পায়।

19. A, Bকে বলল—তোমার কাছে যত টাকা আছে তার থেকে আমার কাছে আরও a টাকা বেশী আছে। আবার তুমি যদি আমাকে তোমার কাছ থেকে b টাকা দাও তবে আমার টাকা তোমার টাকার দ্বিগুণ হবে। বলতো A আর B এদের কার কাছে কত টাকা আছে ?

20. 200 জন বালক বালিকার মধ্যে 25 টাকা এমন ভাবে ভাগ করে দেওয়া গেল যে প্রত্যেক বালক 10 পয়সা ও প্রত্যেক বালিকা 20 পয়সা হিসাবে পায়। তাহলে বালক ও বালিকার সংখ্যা কত ?

21. একটি ছেলে 1 টাকার একটি নোট ভাঙাতে গিয়ে 5 পয়সা ও 3 পয়সায় মিলে মোট 26টি মুদ্রা আনল। সে কোন প্রকারের মুদ্রা কতগুলি এনেছিল।

22. বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 99 বৎসর। 15 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ ছিল। বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়স কত ?

23. 5 বৎসর পূর্বে পরিবারের 7 জন লোকের বয়সের গড় 38 বৎসর। একটি শিশুর জন্মের ফলে বর্তমানে ঐ পরিবারে 8 জন লোকের বয়সের গড় একই দাঁড়াল। তাহোলে বর্তমানে শিশুটির বয়স কত ?

24. একজন লোকের বর্তমান বয়সের 3 গুণ থেকে তার 16 বৎসর পূর্বের বয়সের 4 গুণ বিয়োগ করলে বিয়োগফল বর্তমান বয়সের সমান হয়। লোকটির বর্তমান বয়স কত ?

25. অমল সুবলকে বলল 15 বৎসর পূর্বে তোমার বয়স আমার বয়সের পাঁচ গুণ ছিল। কিন্তু 20 বৎসর পরে তোমার বয়স আমার বয়সের $1\frac{1}{2}$ গুণ হ'বে। বর্তমানে কার বয়স কত ?

26. রহিম ও করিমের বয়সের সমষ্টি 105 বৎসর। যখন রহিমের বয়স করিমের বর্তমান বয়সের সমান ছিল তখন করিমের বয়স রহিমের বর্তমান বয়সের অর্দ্ধেক ছিল। বর্তমানে রহিম ও করিমের বয়স কত ?

27. একটি ট্রেন A থেকে B এর দিকে ঘন্টায় u কি.মি. বেগে এবং অপর একটি ট্রেন B থেকে A এর দিকে ঘন্টায় v কি.মি. বেগে দু'টি সমান্তরাল রেল লাইনের উপর একই সময়ে রওনা হলো। A এবং B এর মধ্যে দূরত্ব d কি.মি. হ'লে ট্রেন দু'টি কখন কোথায় পরস্পরের সংগে মিলিত হবে ?

28. উপরের 27 নং প্রশ্নে যদি দ্বিতীয় ট্রেনটি B থেকে A এর দিকে না গিয়ে প্রথম ট্রেন যে মুখে যাচ্ছে সেই মুখেই যায় এবং $u > v$ হয়, তবে কখন এবং কোথায় প্রথম ট্রেন দ্বিতীয় ট্রেনকে ধরবে ?

29. একজন লোক কিছুটা পথ ট্রেনে ও কিছুটা পথ বাসে গিয়ে 8 ঘন্টায় মোট 400 কি.মি. পথ গেল। ট্রেনের বেগ ঘন্টায় 60 কি.মি. ও বাসের বেগ ঘন্টায় 20 কি.মি. হ'লে, সে কতটা পথ ট্রেনে ও কতটা পথ বাসে গিয়েছিল ?

30. একটি ইঁদুর 20 লাফে যত পথ যেতে পারে ততদূর হ'তে একটি বিড়াল ইঁদুরটিকে ধরবার জন্য দৌড়াতে লাগল। বিড়াল যে সময়ে চারবার লাফ দেয় ইঁদুর সেই সময়ে পাঁচবার লাফ দেয় ; কিন্তু বিড়াল 3 লাফে যত পথ যায় ইঁদুর 4 লাফে সেই পথ যায়। বিড়াল কত লাফ দেওয়ার পর ইঁদুরকে ধরতে পারবে ?

[সংকেত : মনে করা যাক বিড়াল x লাফ দিয়ে ইঁদুরকে ধরতে পারে আর বিড়াল 1 লাফে a মি. পথ যায়। $\therefore$ ইঁদুর ঐ সময়ে $\frac{5x}{4}$ লাফ দেয় আর প্রতি লাফে $\frac{3a}{4}$ মি. পথ যায়। সুতরাং সর্তানুসারে, $ax-\frac{5x}{4}\cdot\frac{3a}{4}=20.\frac{3a}{4}$ অর্থাৎ $x-\frac{15}{16}x=15$ ইত্যাদি]

31. একটি কুকুর মিনিটে ১২ লাফ দিতে পারে আর একটি বিড়াল মিনিটে 20 লাফ দিতে পারে। বিড়াল এক জায়গায় স্থিরভাবে বসে থাকলে কুকুর তাকে 3 মিনিটে ধরতে পারে। কুকুর 2 লাফে যত পথ যায় বিড়াল 5 লাফে ঠিক ততটা পথ যায়। বিড়ালটি স্থির না থেকে যদি পালাতে চেষ্টা করে তবে কুকুর কতক্ষণ পরে বিড়ালকে ধরতে পারবে?

32. একটি ষ্টেশন থেকে অপর একটি ষ্টেশন যেতে একটি এক্সপ্রেস ট্রেনের 3 ঘন্টা সময় লাগে। যদি ট্রেনের গতিবেগ ঘন্টায় আরও 10 কি.মি. বেড়ে যায় তবে 20 মিনিট সময় কম লাগে। ট্রেনের গতিবেগ ও ষ্টেশন দু'টির মধ্যে দূরত্ব বের কর।

[সংকেত ঃ মনে করা যাক ট্রেনের গতিবেগ ঘন্টায় x কি.মি.। $\therefore$ ষ্টেশন দু'টির মধ্যে দূরত্ব $3x$ কি.মি.। দ্বিতীয়বারে ট্রেনের গতিবেগ ঘন্টায় $(x+10)$ কি.মি.। সময় $(3-\frac{1}{3})$ বা $\frac{8}{3}$ ঘন্টা। $\therefore$ প্রশ্নানুসারে $3x=\frac{8}{3}(x+10)$ ইত্যাদি]

33. একটি গাড়ীর সামনের চাকার পরিধি 3 মিটার আর পিছনের চাকার পরিধি 4·5 মিটার। গাড়ীটি কিছুটা রাস্তা যাওয়ার পর দেখা গেল সামনের চাকা পিছনের চাকার চেয়ে 1000 পাক বেশী ঘুরেছে। কোন চাকা কত পাক ঘুরেছে আর গাড়ীটি কতটা পথ গিয়েছে বের কর।

34. 300 মিটার লম্বা একটি ট্রেন ঘন্টায় 60 কিলোমিটার বেগে যায়। ট্রেনটি (1) একটি ল্যাম্প পোস্টকে, (2) 500 মিটার লম্বা একটি প্লাটফর্মকে, (3) একই দিকে ঘন্টায় 30 কিলোমিটার বেগে চলন্ত 350 মিটার লম্বা একটি মালগাড়ীকে এবং (4) বিপরীত দিকে ঘন্টায় 20 কিলোমিটার বেগে চলন্ত 450 মিটার লম্বা অপর একটি মালগাড়ীকে কত সময়ে অতিক্রম করবে ?

35. একখানি নৌকা স্থিরজলে 6 মিনিটে 500 মিটার পথ যায়। কিন্তু স্রোতের অনুকূলে ঐ একই পরিমাণ পথ যেতে 4 মিনিট সময় লাগে। স্রোতের বেগ কত ?

[সংকেত ঃ নৌকার বেগ ঘন্টায় $\frac{500\times60}{6}$ মি. বা কি.মি. মনে করা যাক স্রোতের বেগ ঘন্টায় x কি.মি.। $\therefore$ স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ ঘন্টায় $(x+5)$ কি.মি.। সুতরাং প্রশ্নানুসারে $\frac{4}{60}(x+5)$ কি.মি.$=\frac{500}{1000}$ কি.মি. ইত্যাদি]

36. স্রোতের বেগ ঘন্টায় 4 কিলোমিটার। স্রোতের অনুকূলে কোনও নির্দিষ্ট পথ যেতে নৌকাটির যত সময় লাগে প্রতিকূলে ঐ একই পরিমাণ পথ যেতে তার 5 গুণ সময় লাগে। স্থিরজলে নৌকার গতিবেগ কত ?

37. যদি কোনও বর্গক্ষেত্রের দুই সমান্তরাল বাহুর প্রত্যেককে 16 মিটার বাড়ান হয় এবং অপর দুই সমান্তরাল বাহুর প্রত্যেককে 10 মিটার কমান হয় তবে যে আয়তক্ষেত্রটি পাওয়া যায় তার ক্ষেত্রফল মূল বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল থেকে 10 বর্গমিটার কম। বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য বের কর।

38. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ। দৈর্ঘ্য 10 মি. কমিয়ে প্রস্থ 10 মিটার বাড়ালে নতুন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল মূল আয়তক্ষেত্রের

ক্ষেত্রফল থেকে 300 বর্গমিটার বেশী। মূল আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও ক্ষেত্রফল বের কর।

39. কোনও বাগানের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণের চেয়ে 5 মিটার কম। বাগানটির চারিদিকে 2 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল 236 বর্গমিটার হ'লে বাগানের ক্ষেত্রফল কত ?

40. একটি বৃত্তাকার বাগানের চারিদিকে $2\frac{1}{2}$ মিটার চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল $632\frac{1}{2}$ বর্গমিটার হ'লে বাগানের ক্ষেত্রফল কত ?
[বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\frac{22}{7}$(ব্যাসার্দ্ধ $)^2$]

41. একজন ব্যবসায়ীর দু'টি গাড়ী আছে। গাড়ী দু'টির মোট দাম 45,000 টাকা। সে একটি গাড়ী 20% লাভে ও অপর গাড়ীটি 5% ক্ষতি করে বিক্রয় করল। এতে তার মোটের উপর 10% লাভ হ'ল। গাড়ী দু'টি প্রত্যেকটির ক্রয়মূল্য কত ?

42. একজন লোক 3,100 টাকার কিছু অংশ $7\frac{1}{2}$% এবং বাকী অংশ 12% সরল সুদে খাটালেন। তাতে তিনি 5 বছর পরে 1,500 টাকা সুদ পেলেন। প্রত্যেকক্ষেত্রে কত টাকা খাটান হয়েছিল ?

43. একটি ঘোড়া বিক্রয় করার পরে 5% ক্ষতি হ'ল যদি ঘোড়াটি আরও 44 টাকা বেশী দামে বিক্রয় করা হ'তো তবে 6% লাভ হ'ত। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত ?

44. 1 টাকা 50 পয়সা লিটার দরের দুধ কিনে কিছু জল মিশিয়ে 1 টাকা লিটার দরে বিক্রয় করায় তার $11\frac{1}{9}$% লাভ হল। মিশ্রিত দুধে খাঁটি দুধ ও জলের শতকরা পরিমান কত বের কর।

45. একজন লোক একটি গরু 10% লাভে বিক্রয় করল। যদি গরুটির ক্রয়মূল্য 8% কম হ'তো আর বিক্রয়মূল্য 10 টাকা বেশী হ'তো তবে তার 25% লাভ হ'তো। গরুটির ক্রয়মূল্য কত ?

46. একটি শহরের লোক সংখ্যা 50,0001 পুরুষের সংখ্যা 7% বেশী ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা 9% কম হলেও লোক সংখ্যা একই থাকত। পুরুষ ও স্ত্রীলোক সংখ্যা নির্ণয় কর।

47. একজন দোকানদার প্রতি কিলোগ্রাম 9 টাকা দরে কিছু এবং প্রতি কিলোগ্রাম 15 টাকা দরে কিছু চা কিনে ভালভাবে মিশিয়ে প্রতি

কিলোগ্রাম 11 টাকা দরে বিক্রয় করায় তার 10% লাভ হ'লো। মিশ্রিত চায়ে প্রত্যেক প্রকারের চায়ের শতকরা পরিমান বের কর।

48. 30 লিটার জল মিশ্রিত অ্যালকোহলে (alcohol) 80% অ্যালকোহল ও 20% জল আছে। এতে আর কত জল মেশালে মিশ্রণটিতে মাত্র 30% অ্যালকোহল থাকবে ?

49. একজন দোকানদার তাঁর জিনিসের উপর যে দাম লেখা থাকে তার উপর 20% কমিশন দিয়েও 25% লাভ করেন। যদি কোনও জিনিসের উপর 625 টাকা দাম লেখা থাকে তবে তার ক্রয়মূল্য কত ?

50. 1,100 টাকা A, B ও C এর মধ্যে এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন A, B এর থেকে 50% বেশী এবং C এর থেকে $12\frac{1}{2}$% বেশী পায়।

51. একই সময়ে একজন লোক অন্য একজন লোকের $\frac{5}{3}$ গুণ কাজ করতে পারে। কোনও একটি কাজ দুই জনে একসঙ্গে 12 দিনে শেষ করলে ঐ কাজটি যে ধীরে ধীরে কাজ করে সে কত দিনে করতে পারবে ?

52. কোনও একটি কাজ A 16 দিনে ও B 12 দিনে করতে পারে। কিছুদিন কাজ করার পর A চলে গেল, বাকী কাজ B শেষ করল। কাজটি শেষ হ'তে মোট 13 দিন লাগলে কে কতদিন কাজ করেছিল ?

53. A একটি কাজ 10 দিনে এবং B সেই কাজটি 15 দিনে করতে পারে। উভয়ে কাজটি এক সংগে আরম্ভ করল কিন্তু কাজ শেষ হবার 5 দিন পূর্বেই B চলে গেল। কাজটি মোট কত দিন চলেছিল ?

54. একজন মজুর একমাস কাজ করার জন্য চুক্তি করল। চুক্তিমতে সে যেদিন কাজ করবে সেদিন 5 টাকা মজুরী পাবে আর যেদিন অনুপস্থিত থাকবে সেদিন সে কোনও মজুরী পাবে না উপরন্তু 50 পয়সা জরিমানা দিতে হবে। এতে সে মাসের শেষে 117 টাকা পেল। মজুরটি কতদিন অনুপস্থিত ছিল ? (একমাস=30 দিন।)

55. A একটি কাজ 20 দিনে করতে পারে। ঐ কাজটি A ও B দু'জনে মিলে শুরু করল। 8 দিন পরে A চলে গেল বাকী কাজটি B একাকী 10 দিনে শেষ করল। B একাকী সমস্ত কাজটি কত দিনে করবে ?

56. 10 জন লোক 6 ঘণ্টায় বা 15 জন বালক 10 ঘণ্টায় একটি কাজ সম্পন্ন করতে পারে। 3 জন লোক ও 5 জন বালক একসঙ্গে কত ঘণ্টায় কাজটি শেষ করবে ?

57. একটি খালি চৌবাচ্চা দু'টি নল দিয়ে আলাদা আলাদা ভাবে 6 ও 8 ঘণ্টায় ভর্তি করা যায়। তৃতীয় একটি নল দিয়ে 12 ঘণ্টায় ভর্তি চৌবাচ্চা খালি হ'য়ে যায়। প্রথমে দু'টি নল খুলে দেওয়া হ'লো, 1 ঘণ্টা পর তৃতীয় নলটিও খুলে দেওয়া হ'লো। আর কতক্ষণ পরে চৌবাচ্চাটি ভর্তি হবে ?

58. একটি চৌবাচ্চা 1টি নল দিয়ে 12 ঘণ্টায় পূর্ণ হয়। অপর একটি নল দিয়ে জল বেরিয়ে যায়। প্রথম নলটি 2 ঘণ্টা খুলে রাখার পর দ্বিতীয় নলটি খুলে দেওয়া হ'লে দেখা গেল আরও 30 ঘণ্টা পরে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হল। প্রথম নল বন্ধ রাখলে ভর্তি চৌবাচ্চা দ্বিতীয় নলটি দিয়ে কতক্ষণে খালি হ'বে ?

59. দু'টি নল A ও B একসঙ্গে খুলে দিলে একটি চৌবাচ্চা 15 ঘণ্টায় পূর্ণ হ'লো। শুধু A নলটি খোলা থাকলে চৌবাচ্চায় জল ঢোকে না বেরিয়ে যায় ? যদি বেরিয়ে যায় কতক্ষণে B নল দিয়ে ভর্তি চৌবাচ্চা খালি হবে ?

60. দুটি নল A ও B একসঙ্গে খোলা থাকলে 20 ঘণ্টায় পূর্ণ হয়। কিন্তু কেবল B নলটি খুলে দিলে চৌবাচ্চাটি ভর্তি হতে 25 ঘণ্টা সময় লাগে। A নল দিয়ে জল ঢোকে না বেরিয়ে যায় ? যদি জল ভেতরে ঢোকে তবে কেবল A নলটি দিয়ে কতক্ষণে চৌবাচ্চাটি ভর্তি হ'বে ?

61. 800 জন সৈন্যকে 5 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গের আকারে সাজালে সম্মুখসারির সৈন্য সংখ্যা কত ?

62. একজন সেনাপতি তাঁর অধীনস্থ সৈন্যগণকে 5 গভীরতা বিশিষ্ট কিংবা 7 গভীরতা বিশিষ্ট দু'রকম শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাতে পারেন তবে প্রথম ক্ষেত্রে সম্মুখসারির সৈন্যসংখ্যা দ্বিতীয় ক্ষেত্রের সম্মুখসারির সৈন্যসংখ্যা থেকে 16 জন বেশী। ঐ সৈন্যদলে মোট কতজন সৈন্য আছে ?

63. একজন সেনাপতি তাঁর সৈন্যগণকে 6 গভীরতা-বিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গে সাজাতে গিয়ে দেখেন 396 জন সৈন্য বেশী হয়েছে। তাঁর কাছে আরও

129 জন সৈন্য থাকলে সম্মুখসারির সৈন্য সংখ্যা একই রেখে 9 গভীরতা বিশিষ্ট অন্য একটি শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাতে পারেন। ঐ সৈন্যদলে কতজন সৈন্য আছে ?

64. 2 টা ও 3 টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুটি একত্রিত হবে ?

65. 1 টা ও 2 টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দু'টি বিপরীতমুখী হবে ?

66. 8 টা ও 9 টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দু'টি এক সরলরেখায় থাকবে ?

67. 11 টা ও 12 টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দু'টি কখন এক সমকোণে থাকবে ?

68. 3 টার পরে কখন কাঁটা দু'টি প্রথম সমকোণে থাকবে ?

69. 5 টা ও 6 টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দু'টি কখন 60° কোণে থাকবে ?

70. একজন লোক 7 টা ও 8 টার মধ্যে বাইরে গেলেন। 30 মিনিট পর ফিরে এসে তিনি দেখলেন যে, বাইরে যাবার সময় মিনিটের কাঁটা ঘন্টার কাঁটার যতটা পিছনে ছিল তখন ঠিক ততটা এগিয়ে গিয়েছে। লোকটি কখন বাড়ীর বাইরে গিয়েছিলেন ?

তৃতীয় অধ্যায়

সরল সহ-সমীকরণ নির্ভর প্রশ্নাবলী

§ **3·1** আমরা পূর্বেই দেখেছি যে একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট কোনও প্রশ্নের সমাধান করতে গেলে একটি সরল সমীকরণ সমাধান করার প্রয়োজন হয়। ঠিক সেই ভাবে একাধিক অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট কোনও প্রশ্নের সমাধানের জন্য একাধিক অজ্ঞাত বীজগণিতের প্রতীক সম্বলিত কয়েকটি সমীকরণ সমাধান করার দরকার হয়। এরূপ দলবদ্ধ সমীকরণকে সহ-সমীকরণ বলে। দুই অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণের সমাধানে দু'টি সমীকরণের দরকার ; তিন অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণের সমাধানে তিনটি সমীকরণ দরকার ইত্যাদি। এখন দেখা যাক কি ক'রে এরূপ সমীকরণ সমাধান করা যায়।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $x+y=5 \quad (1)$

$$x-y=1 \quad (2)$$

(1) নং ও (2) নং সমীকরণ দু'টি যোগ ও বিয়োগ করে

$2x=6$ এবং $2y=4$

অর্থাৎ $\boxed{x=3 \text{ এবং } y=2}$ উত্তর

উদাহরণ **2.** সমাধান কর : $3x-2y=8$ (1)

$4x+y=18$ (2)

(1) নং সমীকরণকে 4 দিয়ে আর (2) নং সমীকরণকে 3 দিয়ে গুণ ক'রে পাই

$12x-8y=32$

$12x+3y=54$

বিয়োগ করে পাই, $-11y=-22$ অর্থাৎ $y=2$

y-এর এই মান (1) নং সমীকরণের মধ্যে বসিয়ে পাই,

$3x-2.2=8$

অথবা $3x=8+4=12$

অথবা $x=4$

$\boxed{\therefore x=4\,;\,y=2}$ উত্তর

§ **3·2** উপরের আলোচনায় আমরা মোটামুটি দেখলাম কিভাবে সমীকরণ সমাধান করা যায়। সব সমীকরণই কিন্তু সমাধান করা যায় না। যে সকল সমীকরণ সমাধান করা যায় তাদের সমঞ্জস (consistent) সমীকরণ বলে আর যে সকল সমীকরণ সমাধান করা যায় না তাদের অসমঞ্জস (inconsistent) সমীকরণ বলে। আবার কিছু সমীকরণের অসংখ্য (infinite number) সমাধান থাকে তাদের পরস্পর নির্ভরশীল (dependent) সমীকরণ বলে। যেমন উপরের উদাহরণ 1 ও 2 এর সমীকরণগুলি সমঞ্জস সমীকরণ।

উদাহরণ **3.** নীচের সমীকরণগুলি সমঞ্জস বা অসমঞ্জস বা পরস্পর নির্ভরশীল কিনা আলোচনা কর।

(*a*) $3x+4y+5=0$ (*b*) $4x+6y-9=0$ (*c*) $2x+y-3=0$

$2x+3y-7=0$ $6x+9y+3=0$ $6x+3y-9=0$

(a) $3x+4y+5=0$ (1)

$2x+3y-7=0$ (2)

(1) নং সমীকরণকে 2 দিয়ে আর (2) নং সমীকরণকে 3 দিয়ে গুণ করে পাই

$$6x+8y+10=0$$
$$6x+9y-21=0$$

এই সমীকরণ দু'টিকে বিয়োগ করলে পাই

$-y+31=0$ অর্থাৎ $y=31$

y-এর এই মান (2) নং সমীকরণের মধ্যে বসিয়ে

$$2x+3.31-7=0$$

অথবা $2x=-93+7=-86$

অথবা $x=-43$

সুতরাং আমরা দেখতে পাচ্ছি যে সমীকরণ দু'টির নির্দ্দিষ্ট সমাধান আছে

| ∴ সমীকরণ দু'টি সমঞ্জস সমীকরণ | উত্তর

(b) $4x+6y-9=0$ (1)

$6x+9y+3=0$ (2)

(1) নং সমীকরণকে 3 দিয়ে আর (2) নং সমীকরণকে 2 দিয়ে গুণ করে পাই

$$12x+18y-27=0$$
$$12x+18y+\ 6=0$$

বিয়োগ ক'রে পাই $-33=0$ এবং এটা অসম্ভব।

| সুতরাং সমীকরণ দু'টি অসমঞ্জস সমীকরণ | উত্তর

(c) $2x+\ y-3=0$ (1)

$6x+3y-9=0$ (2)

(1) নং সমীকরণকে 3 দিয়ে গুণ করে গুণফলটিকে (2) নং সমীকরণ থেকে বিয়োগ করে পাই,

$0=0$ একটি অভেদ।

| অর্থাৎ সমীকরণ দু'টি পরস্পর নির্ভরশীল। | উত্তর

দ্রষ্টব্য ঃ এখানে x ও y-এর অসংখ্য মান পাওয়া সম্ভব। যেমন x-এর যে-কোন মান ধরে নিয়ে (1) নং সমীকরণ থেকে y-এর মান পাওয়া যাবে। এভাবে x ও y-এর অসংখ্য মান পাওয়া যাবে।

§ 3·3 এখানে আমরা $ax+by+c=0$ এবং $a'x+b'y+c'=0$ সমীকরণ দু'টির সমাধান সম্বন্ধে আলোচনা করব।

$$ax+by+c=0 \qquad (1)$$
$$a'x+b'y+c'=0 \qquad (2)$$

(1)নং সমীকরণকে a' দিয়ে এবং (2)নং সমীকরণকে a দিয়ে গুণ করে পাই

$$aa'x+a'by+a'c=0$$
$$aa'x+ab'y+ac'=0$$

এই সমীকরণ দু'টি বিয়োগ করে পাই $-(ab'-a'b)y+a'c-ac'=0$ (3)

$$\text{অথবা} \quad y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

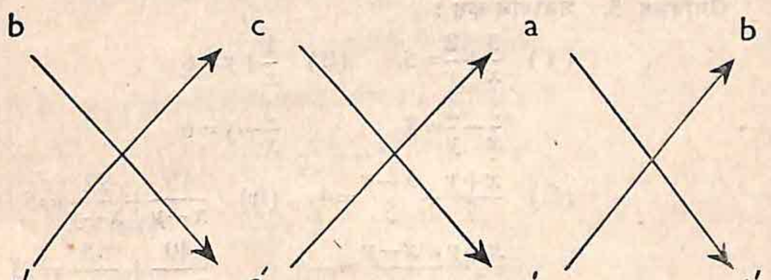
আবার (1) নং সমীকরণকে b' দিয়ে এবং (2) নং সমীকরণকে b দিয়ে গুণ করে নূতন সমীকরণ দু'টি বিয়োগ করে পাই, $x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$; $y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$

অথবা $$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b} \qquad \ldots\ldots (4)$$

(1) ও (2) নং সমীকরণ থেকে লব্ধ (4) নং সমীকরণকে বজ্রগুণন পদ্ধতি (cross-multiplication) বলে।

এই সূত্রটিকে মনে রাখবার জন্য পাশের তীর চিহ্ন দেওয়া সহগগুলির ছকটিকে মনে রাখলেই চলবে। নীচের দিকে যে তীরগুলির মুখ আছে



—5

সেগুলির পূর্বে (+) চিহ্ন আর উপরের দিকে যে তীরগুলির মুখ আছে সেগুলির পূর্বে (−) চিহ্ন দিতে হবে আর তীরের দুই দিকের সহগের গুণফল নিতে হবে।

মন্তব্য ঃ

A. (3) নং সমীকরণ থেকে দেখতে পাই (*i*) $ab'-a'b\neq 0$ হলে সমীকরণগুলি সমঞ্জস (*ii*) $ab'-a'b=0$ কিন্তু $ca'-c'a\neq 0$ (বা $bc'-b'c\neq 0$) হলে সমীকরণগুলি অসমঞ্জস (*iii*) $ab'-a'b=0$ এবং $ca'-c'a=0$ (বা $bc'-b'c=0$) হলে সমীকরণ দুটি পরস্পর নির্ভরশীল।

B. যদি $ax+by+cz=0$ এবং $a'x+b'y+c'z=0$ এই দু'টি সমীকরণ থাকে তবে বজ্রগুণন পদ্ধতিটিকে $\dfrac{x}{bc'-b'c}=\dfrac{y}{ca'-c'a}=\dfrac{z}{ab'-a'b}$ এই আকারেও লেখা যায়।

উদাহরণ 4. সমাধান কর ঃ $7x-11y+5=0$

$$-5x+3y-3=0$$

বজ্রগুণন পদ্ধতির সাহায্যে

$$\frac{x}{(-11).(-3)-(3).5}=\frac{y}{5(-5)-(-3).7}=\frac{1}{7.3-(-5)(-11)}$$

অথবা $\dfrac{x}{33-15}=\dfrac{y}{-25+21}=\dfrac{1}{21-55}$

অথবা $\dfrac{x}{18}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{1}{-34}$ অর্থাৎ $x=-\dfrac{9}{17}$, $y=\dfrac{2}{17}$

$\boxed{x=-\frac{9}{17}\,;\,y=\frac{2}{17}}$ উত্তর

উদাহরণ 5. সমাধান কর ঃ

(*i*) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=5$, $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}=3$ (*ii*) $\dfrac{1}{x}+y=6$, $\dfrac{3}{x}-y=6$

(*iii*) $\dfrac{x+y}{7}+\dfrac{x-y}{5}=4$, $\dfrac{x+y}{7}-\dfrac{x-y}{5}=-4$ (*iv*) $\dfrac{15}{x-y}+\dfrac{22}{x+y}=5$, $\dfrac{40}{x-y}+\dfrac{55}{x+y}=13$

(*i*) সমীকরণ দু'টি যোগ করে

$\frac{3}{x}+\frac{5}{x}=8$ অর্থাৎ $\frac{8}{x}=8$ অর্থাৎ $x=1$

x-এর এই মান প্রথম সমীকরণে বসিয়ে

$\frac{3}{1}+\frac{2}{y}=5$ অর্থাৎ $\frac{2}{y}=5-3=2$ অর্থাৎ $y=1$

$\boxed{x=1, \ y=1}$ উত্তর

(*ii*) সমীকরণ দুটি যোগ করে পাই $\frac{4}{x}=12$ অর্থাৎ $x=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

x-এর এই মান প্রথম সমীকরণে বসিয়ে $3+y=6$ অর্থাৎ $y=3$

$\boxed{x=\frac{1}{3}, \ y=3}$ উত্তর

(*iii*) সমীকরণ দুটি যোগ ও বিয়োগ করে পাই

$2.\frac{x+y}{7}=0$ এবং $2.\frac{x-y}{5}=8$

অর্থাৎ $x+y=0$ এবং $x-y=40$

$\therefore \quad x=-y=20$

$\boxed{x=20, \ y=-20}$ উত্তর

(*iv*) প্রথম সমীকরণকে 5 দিয়ে আর দ্বিতীয় সমীকরণকে 2 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$\frac{75}{x-y}+\frac{110}{x+y}=25$$

$$\frac{80}{x-y}+\frac{110}{x+y}=26$$

এই সমীকরণ দু'টি বিয়োগ করে পাই

$$\frac{5}{x-y}=1 \quad \text{অথবা } x-y=5 \qquad \cdots \qquad (1)$$

$x-y$ এর এই মান প্রথম সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\frac{15}{5}+\frac{22}{x+y}=5$$

অথবা $\frac{22}{x+y}=2$

অথবা $x+y=11 \qquad \cdots \qquad (2)$

(1) ও (2) হতে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করে পাই $x=8$, $y=3$

$$\boxed{x=8,\ y=3}$$ উত্তর

উদাহরণ 6. সমাধান কর ঃ

$$2x-5y+6z+41=0 \quad \ldots \quad (1)$$
$$5x-3y+2z+22=0 \quad \ldots \quad (2)$$
$$3x-6y+4z+37=0 \quad \ldots \quad (3)$$

(2) নং সমীকরণকে 2 দিয়ে গুণ করে (3) নং সমীকরণ থেকে বিয়োগ এবং (2) নং সমীকরণকে 3 দিয়ে গুণ করে (1) নং সমীকরণ থেকে বিয়োগ করে পাই,

$-7x-7=0$ এবং $-13x+4y-25=0$

সুতরাং $x=-1$ এবং $-13(-1)+4y-25=0$

অথবা $4y=25-13=12$

অথবা $y=3$

(1)নং সমীকরণে x ও y এর মান বসিয়ে

$2.(-1)-5.(3)+6z+41=0$

অর্থাৎ $-2-15+6z+41=0$

অর্থাৎ $6z=2+15-41=-24$

অর্থাৎ $z=-4$

$$\boxed{x=-1,\quad y=3,\quad z=-4}$$ উত্তর

§ 3·4 প্রশ্নমালা—9

নীচের সমীকরণগুলি সমাধান কর

1. $\begin{cases} x+y=29 \\ x-y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=13 \\ -x+y=17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+8y=11 \\ 9x-5y=4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+10y=20 \\ 6x+5y=10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x-13y=2 \\ 16x+3y=51 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 20x+3y=17 \\ 5x+6y=-1 \end{cases}$

7. $3x-5y+11=0$ এবং $4x+5y-23=0$

8. $9x-5y-18=0$ এবং $6x-7y+21=0$

9. $2x-5y+4=0$ এবং $3x-7y+5=0$

10. $7x-9y+22=0$ এবং $8y-15x-2=0$

11. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ এবং $ax+by=a^2+b^2$

12. $ax+by=2$ এবং $bx+ay=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

13. $8x-7y=9$ এবং $9x+5y-23=0$

14. $4x=5y$ এবং $5x+4y=41$

15. $29x-27y=4$ এবং $5x-26y+42=0$

16. $\frac{8}{x}+\frac{15}{y}=33$ এবং $\frac{4}{x}-\frac{35}{y}=-43$

17. $\frac{2}{7x}+\frac{1}{3y}=3$ এবং $\frac{1}{x}-\frac{2}{3y}=5$

18. $\frac{1}{4x}-\frac{1}{y}=7$ এবং $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-22$

19. $\frac{4}{x}+5y=14$ এবং $\frac{3}{x}+4y=10$

20. $2x+\frac{3}{y}=5$ এবং $7x-\frac{5}{y}=2$

21. $\frac{5x}{2}-\frac{5y+16}{4}=6$ এবং $2(3x-2y)+\frac{5y}{4}=25$

22. $\frac{2x+3y}{5}+\frac{2x-3y}{3}=8$ এবং $\frac{2x+3y}{5}-\frac{2x-3y}{3}=-8$

23. $\begin{cases} 4x-5y+6z-1=0 \\ 8x-7y+3z+1=0 \\ 7x-8y+9z+2=0 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x+y+z+6=0 \\ x+2y+3z+12=0 \\ x+3y+6z+20=0 \end{cases}$

25. $x+y=25,\quad y+z=29,\quad z+x=36$

26. $y+z-x=50$; $z+x-y=72,\quad x+y-z=58$

27. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+3=0 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}+4=0 \\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}+5=0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+10=0 \\ \frac{2}{y}+\frac{3}{z}+12=0 \\ \frac{3}{z}+\frac{1}{x}+10=0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \frac{1}{y}+z=5 \\ z+\frac{1}{x}=6 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x+\frac{1}{y}-z=1 \\ 3x-\frac{4}{y}+5z=9 \\ 2x+\frac{3}{y}+4z=19 \end{cases}$

নীচের সমীকরণগুলি সমঞ্জস সমীকরণ কি না আলোচনা কর

31. $2x+5=\frac{x+3}{2}+\frac{3x+2}{2}$; **32.** $3x+5=\frac{2x+3}{2}+\frac{4x+7}{2}$

33. $2x+9=x+11$ **34.** $2x+y=7$; $x+y=5$

35. $3x+2y+5=0,\quad 6x+4y+9=0$

36. $x+y+z=5$; $x-y+z=3$; $x+z=4$

37. $x+y+2z=7$; $3x+7y+8z=13$; $2x+4y+5z=19$

38. $x+y=3$; $y+z=5$; $z+x=6$.

§ 3·5 সমীকরণ নির্দেশক বিবিধ উদাহরণমালা

(1.) সংখ্যা বিষয়ক

উদাহরণ 1. এমন দু'টি সংখ্যা বের কর যাদের যোগফল 63 ও বিয়োগফল 11. মনে করা যাক, সংখ্যাদুটি x ও y এবং x, yএর চেয়ে বড়।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে $x+y=63$ এবং $x-y=11$

এই সমীকরণদুটি সমাধান করলে পাই $x=37$, $y=26$

সংখ্যা দু'টি 37 ও 26	উত্তর।

উদাহরণ 2. এমন দু'টি সংখ্যা বের কর যাদের ভাগফল 5 এবং যোগফল 36. মনে করা যাক, বড় সংখ্যাটি x এবং ছোট সংখ্যাটি y.

$\therefore \frac{x}{y}=5$ এবং $x+y=36$

অর্থাৎ $x=5y$ এবং $x+y=36$

অর্থাৎ $5y+y=36$ অথবা $y=6$ এবং $x=5.6=30$

∴ সংখ্যা দু'টি হ'ল 30 ও 6 উত্তর।

উদাহরণ 3. দুই অঙ্কের একটি সংখ্যার অঙ্কগুলির যোগফল সংখ্যাটির এক চতুর্থাংশ এবং ঐ সংখ্যাটিতে 27 যোগ করলে সংখ্যাটি উল্টে যায়; সংখ্যাটি কত?

মনে করা যাক, সংখ্যাটির দশকের অঙ্ক x এবং এককের অঙ্ক y.

∴ প্রশ্নানুসারে, $x+y=\frac{10x+y}{4}$

এবং $10x+y+27=10y+x$

অর্থাৎ $6x-3y=0$ বা $y=2x$

এবং $9y-9x=27$ বা $y-x=3$

অথবা $2x-x=3$ বা $x=3$ এবং $y=2.3=6$

∴ সংখ্যাটি$=36$ উত্তর।

উদাহরণ 4. তিন অঙ্কের একটি সংখ্যার অঙ্কগুলির যোগফল 16; দশকের অঙ্ক একক ও শতকের অঙ্কদু'টির যোগফলের থেকে 2 কম এবং সংখ্যাটি উল্টে লিখলে মূল সংখ্যা থেকে 297 কম হয়। মূল সংখ্যাটি কত?

মনে করা যাক, সংখ্যাটির শতক, দশক ও এককের অঙ্কগুলি যথাক্রমে x, y, z.

∴ প্রশ্নানুসারে $x+y+z=16$ (1)

$$y=x+z-2 \quad (2)$$

$$100z+10y+x=100x+10y+z-297 \quad (3)$$

(1) ও (2) নং সমীকরণ থেকে পাই $y=7$ এবং $x+z=9$ (4)

(3) সমীকরণ থেকে পাই $99(x-z)=297$

অথবা $x-z=3$ (5)

(4) ও (5) থেকে পাই $x=6, z=3$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি হল 673 উত্তর।

(2) ভগ্নাংশ বিষয়ক প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 5. একটি ভগ্নাংশের লবের সহিত 3 ও হরের সহিত 9 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়, আবার লবের থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সংগে 4 যোগ করলেও ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

মনে করা যাক, ভগ্নাংশটির লব x ও হর y

সুতরাং প্রশ্নানুসারে

$\frac{x+3}{y+9}=\frac{1}{2}$ এবং $\frac{x-1}{y+4}=\frac{1}{3}$

অর্থাৎ $2x+6=y+9$ এবং $3x-3=y+4$

অর্থাৎ $2x-y=3$ এবং $3x-y=7$

সমাধান করলে পাই $x=4$, $y=5$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি হল $\frac{4}{5}$ উত্তর।

(3) বণ্টন বিষয়ক প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 6. A, B এবং C এর মধ্যে 1000 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন A ও B একত্রে C এর চেয়ে 600 টাকা বেশী পায় আর A, B এর চেয়ে 200 টাকা কম পায়।

মনে করা যাক, A, B, C যথাক্রমে x টাকা, y টাকা ও z টাকা পায়

∴ প্রশ্নানুসারে $x+y+z=1000$ (1)

$x+y-z=600$ (2)

$x=y-200$ (3)

(1) ও (2) হতে পাই $z=200$ এবং $x+y=800$

(3) হতে পাই $x-y=-200$

∴ $x=300$ $y=500$

সুতরাং A, 300 টাকা B, 500 টাকা এবং C, 200 টাকা পায় উত্তর।

(4) বয়স বিষয়ক প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 7. 5 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিন গুণ হবে আর 5 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 7 গুণ ছিল। বর্তমানে তাদের বয়স কত ?

মনে করা যাক, বর্তমানে পিতার বয়স x বৎসর আর পুত্রের বয়স y বৎসর

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে $\begin{cases} x+5=3(y+5) \\ x-5=7(y-5) \end{cases}$ অর্থাৎ $\begin{cases} x-3y=10 \\ x-7y=-30 \end{cases}$

বিয়োগ করলে পাই $4y=40$ অর্থাৎ $y=10$

$$\therefore\ x=10+3y=10+3\cdot10=40$$

$\therefore$ বর্তমানে পিতার বয়স 40 বৎসর
পুত্রের বয়স 10 বৎসর। উত্তর।

উদাহরণ 8. একজন লোকের 4টি পুত্র আছে। বর্তমানে 4 জন পুত্রের বয়সের সমষ্টি পিতার বয়সের সমান, 15 বৎসর পরে ঐ 4 জন পুত্রের বয়সের সমষ্টি পিতার বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে পিতার বয়স কত ?

মনে করা যাক, বর্তমানে পিতার বয়স x বৎসর ও 4 পুত্রের বয়স যথাক্রমে y_1, y_2, y_3 ও y_4 বৎসর।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে $y_1+y_2+y_3+y_4=x$ ... (1)

এবং $(y_1+15)+(y_2+15)+(y_3+15)$
$+(y_4+15)=2(x+15)$ ... (2)

(2) নং সমীকরণ থেকে (1) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই

$$60=x+30$$

অথবা $x=30$

$\therefore$ বর্তমানে পিতার বয়স 30 বৎসর উত্তর।

(5) সময় ও দূরত্ব বিষয়ক প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 9. দুটি ট্রেনের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 200 মিটার ও 300 মিটার। ট্রেন দুটি পাশাপাশি দুটি রেলের উপরে চলতে পারে। যদি ট্রেন দু'টি একই দিকে চলে তবে দ্রুতগামী ট্রেনটি মন্দগামী ট্রেনটিকে 2 মিনিটে অতিক্রম করে আর ট্রেন দুটি বিপরীত দিকে চললে পরস্পরকে অতিক্রম করতে 30 সেকেণ্ড সময় লাগে। ট্রেন দুটির গতিবেগ কত ?

মনে করা যাক, দ্রুতগামী ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় x কি.মি.

আর মন্দগামী ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় y কি.মি.

∴ উহাদের আপেক্ষিক গতিবেগ হবে যথাক্রমে

ঘণ্টায় $x-y$ কি.মি. যখন একই দিকে যায়

এবং ঘণ্টায় $x+y$ কি.মি. যখন বিপরীত দিকে যায়।

আবার পরস্পরকে অতিক্রম করতে হ'লে আপেক্ষিক গতিতে মোট 200 মি.+300 মি.=500 মি. $=\frac{1}{2}$ কি.মি. পথ যেতে হবে।

∴ প্রশ্নানুসারে

$\dfrac{\frac{1}{2}}{x-y}$ ঘণ্টা=2 মিনিট বা $\frac{1}{30}$ ঘণ্টা

এবং $\dfrac{\frac{1}{2}}{x+y}$ ঘণ্টা=30 সেকেণ্ড বা $\frac{1}{120}$ ঘণ্টা

অর্থাৎ $x-y=15$ এবং $x+y=60$

∴ $x=37\frac{1}{2}$ এবং $y=22\frac{1}{2}$

∴ ট্রেন দু'টির গতিবেগ ঘণ্টায় $37\frac{1}{2}$ কিলোমিটার ও $22\frac{1}{2}$ কিলোমিটার।	উত্তর।

উদাহরণ 10. একটি নৌকার স্রোতের প্রতিকূলে 60 কি.মি. ও স্রোতের অনুকূলে 88 কি.মি. যেতে মোট 10 ঘণ্টা সময় লাগে আবার স্রোতের প্রতিকূলে 80 কি.মি. ও স্রোতের অনুকূলে 110 কি.মি. যেতে 13 ঘণ্টা সময় লাগে। স্থির জলে নৌকার বেগ ও স্রোতের গতিবেগ কত?

মনে করা যাক, স্থির জলে নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগ যথাক্রমে ঘণ্টায় u ও v কি.মি.। সুতরাং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় $(u-v)$ কি.মি. ও স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় $(u+v)$ কি.মি.

∴ প্রশ্নানুসারে $\dfrac{60}{u-v}+\dfrac{88}{u+v}=10$ ... (1)

এবং $\dfrac{80}{u-v}+\dfrac{110}{u+v}=13$ ... (2)

(1) নং সমীকরণকে 4 দিয়ে আর (2) নং সমীকরণকে 3 দিয়ে গুণ করে পাই,

$$\frac{240}{u-v}+\frac{352}{u+v}=40$$

$$\frac{240}{u-v}+\frac{330}{u+v}=39$$

এই সমীকরণ দুটি বিয়োগ করে

$$\frac{22}{u+v}=1 \text{ অর্থাৎ } u+v=22 \quad \cdots \quad (3)$$

$u+v$ এর এই মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$\frac{60}{u-v}+\frac{88}{22}=10 \text{ অর্থাৎ } \frac{60}{u-v}=10-4=6$$

$$\text{অথবা } u-v=\frac{60}{6}=10 \quad \cdots \quad (4)$$

(3) নং ও (4) নং সমীকরণ থেকে পাই $u=16$ এবং $v=6$

∴ স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার
এবং স্থির জলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় 16 কিলোমিটার — উত্তর

(6) ক্ষেত্রফল বিষয়ক প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 11. কোনও আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য 6 মিটার বাড়ালে এবং প্রস্থ 6 মিটার কমালে ক্ষেত্রফল 336 বর্গমিটার কমে যায়, আবার, দৈর্ঘ্য 5 মিটার কমিয়ে প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল 30 বর্গমিটার বেড়ে যায়। বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বের কর।

মনে করা যাক, বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x ও y মিটার
সুতরাং প্রশ্নানুসারে

$$xy-(x+6)(y-6)=336$$

এবং $(x-5)(y+4)-xy=30$

অর্থাৎ, $6x-6y+36=336$ বা, $x-y=50 \quad \cdots \quad (1)$

এবং $4x-5y-20=30$ বা, $4x-5y=50 \quad \cdots \quad (2)$

(1) নং সমীকরণকে 4 দিয়ে গুণ করে (2) নং সমীকরণ থেকে বিয়োগ করলে পাই

$$-5y+4y=50-200 \text{ বা } -y=-150 \text{ বা } y=150$$

∴ (1) নং সমীকরণ থেকে পাই $x=150+50=200$

বাগানের দৈর্ঘ্য $=200$ মিটার
প্রস্থ $=150$ মিটার। — উত্তর

(7) **লাভক্ষতি বিষয়ক প্রশ্নাবলী**

উদাহরণ 12. একজন ব্যবসায়ীর দুটি গাড়ী আছে। একটি গাড়ী 20% লাভে ও অপরটি 8% লাভে বিক্রয় করায় তার মোটের উপর 15% লাভ হল। গাড়ীদুটির মোট ক্রয়মূল্য 45,000 টাকা হলে কোন্ গাড়ীর মূল্য কত ?

মনে করা যাক, গাড়ীদুটির ক্রয়মূল্য যথাক্রমে x ও y টাকা।

প্রথমটিতে লাভ $\frac{20x}{100}$ টাকা ও দ্বিতীয়টিতে লাভ $\frac{8y}{100}$ টাকা

আবার মোট লাভ হচ্ছে $\frac{15}{100}\times 45,000$ টাকা

সুতরাং প্রশ্নানুসারে

$$\frac{20x}{100}+\frac{8y}{100}=\frac{15}{100}\times 45,000$$

অথবা $5x+2y=\frac{15\times 45000}{4}=16,8750 \quad \cdots \quad (1)$

আবার গাড়ী দুটির মোট মূল্য 45,000 টাকা

$\therefore \quad x+y=45000 \quad \cdots \quad (2)$

(2) নং সমীকরণকে 2 দিয়ে গুণ করে (1)নং সমীকরণ থেকে বিয়োগ করে পাই

$3x=78,750$ অথবা $x=26,250$

x-এর এই মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে $y=18,750$

গাড়ী দুটির মূল্য যথাক্রমে 26,250 টাকা ও 18,750 টাকা। উত্তর

উদাহরণ 13. একজন ব্যবসায়ী 144 টাকা দিয়ে টাকায় 3টি দরে কিছু ও টাকায় 4টি দরে কিছু কমলালেবু কিনল। 64টি কমলালেবু পচে গেল। অবশিষ্ট কমলালেবুগুলির প্রত্যেকটি 40 পয়সা দরে বিক্রয় করল। এতে তার মোট 17·60 টাকা লাভ হল। লোকটি কোন্ প্রকারের কমলালেবু কতটি কিনেছিল ?

মনে করা যাক, লোকটি প্রথম প্রকারের xটি ও দ্বিতীয় প্রকারের yটি কমলালেবু কিনেছিল। সুতরাং পচে যাওয়ার পর $(x+y-64)$টি লেবু 40 প. দরে বেচেছিল

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=144$ … (1)

এবং $(x+y-64)\frac{40}{100}=144+17{\cdot}60=161{\cdot}60$

অথবা, $40(x+y-64)=16160$

অথবা, $x+y-64=404$

অথবা, $x+y=468$ … (2)

(1)নং সমীকরণকে 3 দিয়ে গুণ করে (2)নং সমীকরণ থেকে বিয়োগ করলে পাই

$y-\frac{3}{4}y=468-432$

অথবা $\frac{1}{4}y=36$ বা $y=144$

(2)নং সমীকরণ থেকে, $x=468-144=324$

$\therefore$ লোকটি বেশী দামের লেবু 324টি ও কম দামের লেবু 144টি কিনেছিল	উত্তর

(8) মিশ্রণ সম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 14. তিনটি পাত্রে যথাক্রমে 2 : 3 : 5 ; 4 : 2 : 3 এবং 3 : 2 : 1 অনুপাতে এলকোহল, চিনি ও জল-এর মিশ্রণ আছে। ঐ মিশ্রণ তিনটিকে কোন্ অনুপাতে মেশালে নূতন মিশ্রণে এলকোহল, চিনি ও জলের অনুপাত 14 : 10 : 15 হ'বে।

মনে করা যাক, মিশ্রণ তিনটির অনুপাত যথাক্রমে $x:y:z$ সুতরাং নূতন মিশ্রণে এলকোহল, চিনি ও জলের অনুপাত হবে

$2x+4y+3z : 3x+2y+2z : 5x+3y+1{\cdot}z$

সুতরাং প্রশ্নানুসারে

$2x+4y+3z : 3x+2y+2z : 5x+3y+z=14:10:15$

অর্থাৎ, $\frac{2x+4y+3z}{14}=\frac{3x+2y+2z}{10}=\frac{5x+3y+z}{15}$

অর্থাৎ, $\begin{cases} 42x+28y+28z=20x+40y+30z \\ 45x+30y+30z=50x+30y+10z \end{cases}$

অর্থাৎ, $\begin{cases} 22x-12y-2z=0 \\ 5x=20z \end{cases}$

অর্থাৎ, $x=4z$ এবং $11x-6y-z=0.$

অর্থাৎ, $x=4z$ এবং $44z-6y-z=0$ x এর মান বসিয়ে।

অর্থাৎ, $x=4z$ এবং $6y=43z$

অর্থাৎ, $\frac{x}{24}=\frac{z}{6}$ এবং $\frac{y}{43}=\frac{z}{6}$

অর্থাৎ, $\frac{x}{24}=\frac{y}{43}=\frac{z}{6}$

∴ নির্ণেয় অনুপাত 24 : 43 : 6. উত্তর

(9) সময় ও কার্য বিষয়ক প্রশ্নাবলী

উদাহরণ 15. A ও B একত্রে একটি কাজ 40 দিনে, B ও C একত্রে ঐ কাজটি 30 দিনে A ও C একত্রে ঐ একই কাজ 24 দিনে করতে পারে। ঐ কাজটি প্রত্যেকে একাকী কতদিনে করতে পারে ?

মনে করা যাক, কাজটি A, B, C একাকী যথাক্রমে x, y ও z দিনে সম্পন্ন করে।

সুতরাং 1 দিনে A ও B একত্রে ঐ কাজটির $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ অংশ করে,

B ও C একত্রে ঐ কাজটির $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ অংশ করে,

এবং C ও A একত্রে ঐ কাজটির $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}$ অংশ করে

∴ প্রশ্নানুসারে

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{40} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{24} \quad \ldots \quad (3)$$

যোগ করে পাই, $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{40}+\frac{1}{30}+\frac{1}{24}=\frac{12}{120}$

অথবা $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}$

এই সমীকরণ থেকে যথাক্রমে (1), (2) ও (3) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{20}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40},\ \frac{1}{x}=\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{3-2}{60}=\frac{1}{60}$$

এবং $\frac{1}{y}=\frac{1}{20}-\frac{1}{24}=\frac{5-4}{120}=\frac{1}{120}$

$\therefore\ x=60,\ y=120,\ z=40$

A, B ও C একাকী যথাক্রমে 60 দিনে, 120 দিনে ও 40 দিনে কাজটি করতে পারবে।	উত্তর

উদাহরণ 16. 3 জন লোক ও 4 জন বালক একত্রে একটি কাজ 10 দিনে সম্পন্ন করতে পারে। ঐ কাজটি 2 জন লোক ও 12 জন বালক একত্রে 8 দিনে সম্পন্ন করে। 4 জন লোক ও 2 জন বালকে ঐ কাজটি কতদিনে সম্পন্ন করবে ?

মনে করা যাক, 1 জন লোক x দিনে ও 1 জন বালক y দিনে কাজটি করতে পারে। সুতরাং 1 জন লোক 1 দিনে কাজটির $\frac{1}{x}$ অংশ ও 1 জন বালক 1 দিনে কাজটির $\frac{1}{y}$ অংশ করে।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{10}$

এবং $\frac{2}{x}+\frac{12}{y}=\frac{1}{8}$

সমাধান করে পাই, $x=40\ ;\ y=160$

$\therefore$ 4 জন লোক ও 2 জন বালক একত্রে 1 দিনে $\frac{4}{x}+\frac{2}{y}=\frac{4}{40}+\frac{2}{160}$

বা $\frac{5}{80}=\frac{1}{16}$ অংশ কাজ করতে পারবে।

$\therefore$ সম্পূর্ণ কাজটি 16 দিনে সম্পন্ন হ'বে।

4 জন লোক ও 2 জন বালক মিলে কাজটি 16 দিনে সম্পন্ন করবে।	উত্তর

10 নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 17. একটি চৌবাচ্চায় A, B, C নামে তিনটি নল আছে। এদের মধ্যে দুটি নল দিয়ে ভিতরে জল আসে আর অপরটি দিয়ে জল বেরিয়ে যায়। তিনটি নলই একসঙ্গে খুলে রাখলে খালি চৌবাচ্চা $2\frac{6}{7}$ ঘন্টায় পূর্ণ হয়। A ও B নল দু'টি খুলে রাখলে $6\frac{2}{3}$ ঘন্টায় খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়। আবার B ও C নল দু'টি খুলে রাখলে খালি চৌবাচ্চা 10 ঘন্টায় পূর্ণ হয়। কোন্ নল দিয়ে জল বেরিয়ে যাচ্ছে আর কোন্ কোন্ নল দিয়ে জল ঢুকছে বের কর এবং যে সব নল দিয়ে জল ঢুকছে সেগুলি একাকী কতক্ষণে খালি চৌবাচ্চা ভর্তি করবে আর যে নল দিয়ে জল বেরিয়ে যাচ্ছে সেই নল দিয়ে ভর্তি চৌবাচ্চা কতক্ষণে খালি হবে ?

মনে করা যাক, A, B ও C নল দিয়ে যথাক্রমে ঘন্টায় চৌবাচ্চাটির x, y ও z অংশ পূর্ণ হয়।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে

$2\frac{6}{7}(x+y+z)=1$ অর্থাৎ $x+y+z=\frac{7}{20}$ ... (1)

$6\frac{2}{3}(x+y)=1$ $\quad x+y=\frac{3}{20}$ ... (2)

$10(y+z)=1$ $\quad y+z=\frac{1}{10}$ ... (3)

(1)নং সমীকরণ থেকে ক্রমান্বয়ে (2)নং ও (3)নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই

$z=\frac{4}{20}=\frac{1}{5},\ x=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

আবার (3) হইতে

$y=\frac{1}{10}-z=\frac{1}{10}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{10}$.

এখানে y এর মান ঋণাত্মক সুতরাং B নল দিয়ে জল বেরিয়ে যায়। আর A ও C নল দিয়ে জল ঢোকে এবং A ও C নল দিয়ে যথাক্রমে 4 ঘন্টা ও 5 ঘন্টায় খালি চৌবাচ্চা ভর্তি হয় আর B নল দিয়ে 10 ঘন্টায় জলপূর্ণ চৌবাচ্চা খালি হয়।

A নল দিয়ে খালি চৌবাচ্চা 4 ঘন্টায় পূর্ণ হয় ; B নল দিয়ে ভর্তি চৌবাচ্চা 10 ঘন্টায় খালি হয় ; C নল দিয়ে খালি চৌবাচ্চা 5 ঘন্টায় পূর্ণ হয়।	উত্তর

(11) ঘড়ি সম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 18. একজন লোক বেলা 1টা ও 2টার মধ্যে বের হয়ে 4টা ও 5টার মধ্যে ফিরে এসে দেখলেন যে ঘড়ির কাঁটা দু'টি পরস্পর স্থান বিনিময় করেছে। তিনি কখন বের হয়েছিলেন আর কখন ফিরে এসেছিলেন?

মনে করা যাক, লোকটি 1টা বেজে x মিনিটে বেরিয়ে গিয়েছিলেন এবং 4টা বেজে y মিনিটে ফিরে এসেছিলেন।

যখন তিনি বেড়াতে গিয়েছিলেন তখন মিনিটের কাঁটা x মিনিটের ঘরে ও ঘন্টার কাঁটা $\left(5+\frac{x}{12}\right)$ মিনিটের ঘরে ছিল। আবার যখন তিনি ফিরে এসেছিলেন তখন মিনিটের কাঁটা y মিনিটের ঘরে ও ঘন্টার কাঁটা $\left(20+\frac{y}{12}\right)$ মিনিটের ঘরে ছিল।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে $x=20+\frac{y}{12}$ এবং $5+\frac{x}{12}=y$

অর্থাৎ $12x-y-240=0$

এবং $x-12y+60=0$

বজ্রগুণন পদ্ধতির সাহায্যে

$$\frac{x}{-60-2880}=\frac{y}{-240-720}=\frac{1}{-144+1}$$

অথবা $\frac{x}{-2940}=\frac{y}{-960}=\frac{1}{-143}$

$\therefore\quad x=\frac{2940}{143}=20\frac{80}{143}$ এবং $y=\frac{960}{143}=6\frac{102}{143}$

সুতরাং লোকটি 1 টা $20\frac{80}{143}$ মিনিটে বেড়াতে বেরিয়েছিলেন এবং 4 টা $6\frac{102}{143}$ মিনিটে ফিরে এসেছিলেন।	উত্তর

(12) বিবিধ প্রশ্নাবলী।

উদাহরণ 19. 8টি বীজগণিত বই ও 10টি জ্যামিতি বই এর দাম একত্রে 98 টাকা এবং 14টি বীজগণিত ও 8টি জ্যামিতি বই এর দাম একত্রে 124 টাকা হ'লে বীজগণিত ও জ্যামিতি বই এর দাম কত?

মনে করা যাক, 1টি বীজগণিত ও 1টি জ্যামিতির মূল্য যথাক্রমে x ও y টাকা।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $8x+10y=98$ (1)

$14x+8y=124$ (2)

(1) নং সমীকরণকে 4 দিয়ে আর (2) নং সমীকরণকে 5 দিয়ে গুণ করে

$$32x+40y=392$$
$$70x+40y=620$$

বিয়োগ করে $32x-70x=392-620$

অথবা $-38x=-228$

অথবা $x=6$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণ থেকে $8\times6+10y=98$ অথবা $10y=98-48=50$

অথবা $y=5$

বীজগণিতের দাম 6 টাকা, জ্যমিতির দাম 5 টাকা	উত্তর

উদাহরণ 20. একটি ছাত্রাবাসে 50 জন ছাত্র থাকলে মাসে 3000 টাকা খরচ হয়। কিন্তু 75 জন ছাত্র থাকলে মাসে 4250 টাকা খরচ হয়। ঐ ছাত্রাবাসে 60 জন ছাত্র থাকলে মাসে কত টাকা ক'রে খরচ হবে ?

মনে করা যাক, খরচের স্থির অংশটুকু x টাকা এবং পরিবর্তনশীল অংশটুকু প্রতি ছাত্রের জন্য y টাকা। সুতরাং প্রশ্নানুসারে,

$$x+50y=3000$$
$$x+75y=4250$$

বিয়োগ করে, $25y=1250$ বা $y=50$

$\therefore$ $x=3000-50y=3000-50\times50=500$

$\therefore$ 60 জন ছাত্র থাকিলে মাসে খরচ পড়বে ($x+60y$) টাকা

$=(500+60\times50)$ টাকা $=3500$ টাকা

60 জন ছাত্র থাকলে মাসে 3500 টাকা খরচ হবে।	উত্তর

উদাহরণ 21. একটি মাঠে সমান হারে ঘাস জন্মে। ঐ মাঠের সমস্ত ঘাস 40টি গরুতে 30 দিনে ও 80টি গরুতে 10 দিনে খেয়ে শেষ করতে পারে তবে 50টি গরুতে কতদিনে ঐ মাঠের ঘাস শেষ করবে ?

মনে করা যাক, মাঠে প্রথমে x কিলোগ্রাম ঘাস ছিল আর দিনে y কি.গ্রা. করে ঘাস জন্মায় এবং 1টি গরু দিনে a কি.গ্রা. ঘা খায় আর 50টি গরুতে z দিনে ঐ ঘাস খেতে পারে।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে

$$\begin{cases} x+30y=40.30.a=1200a & (1) \\ x+10y=80.10.a=800a & (2) \\ x+z.y=50.za & (3) \end{cases}$$

(1) নং সমীকরণ থেকে (2) নং সমীকরণ বিয়োগ করলে

$20y=400a$ বা $y=20a$ (4)

$\therefore$ (2) নং সমীকরণ থেকে, $x=800a-10y=800a-200a=600a$ (5)

$\therefore$ (3) নং সমীকরণ থেকে, $600a+20az=50az$

অথবা $30az=600a$ অর্থাৎ $z=\dfrac{600a}{30a}=20$

$\therefore$ 50টি গরু 20 দিনে ঐ মাঠের সব ঘাস খেয়ে ফেলবে। উত্তর

§ 3·6. প্রশ্নমালা 10

1. দুই অঙ্কের একটি সংখ্যার অঙ্ক দু'টির যোগফল 12। সংখ্যাটির সহিত 54 যোগ করলে সংখ্যাটি উল্টে যায়। সংখ্যাটি কত?
2. দুই অঙ্কের কোনও সংখ্যার অঙ্ক দুটির যোগফল সংখ্যাটির এক পঞ্চমাংশ আর ঐ সংখ্যাটির সহিত 9 যোগ করলে সংখ্যাটি উল্টে যায়। সংখ্যাটি কত?
3. তিন অঙ্কের একটি সংখ্যার অঙ্ক গুলির যোগফল 19, দশকের অঙ্ক একক ও শতকের অঙ্কের যোগফলের চেয়ে 1 কম। সংখ্যাটি উল্টে দিলে মূল সংখ্যা থেকে 594 কমে যায়, সংখ্যাটি কত?
4. দুই অঙ্কের একটি সংখ্যা বের কর যার অঙ্কদুটির যোগফল সংখ্যাটির এক চতুর্থাংশ এবং যার সংগে 36 যোগ করলে তার অঙ্ক দু'টি উল্টে যায়।
5. একটি সংখ্যার অঙ্ক দুটির যোগফল 10 আর সংখ্যাটি উল্টে লিখলে 36 বেড়ে যায়। সংখ্যাটি কত?
6. এমন দু'টি সংখ্যা বের কর যাদের যোগফল ও বিয়োগফল যথাক্রমে 195 ও 103।
7. এমন দুটি সংখ্যা বের কর যাদের ভাগফল 25 এবং যোগফল 702।

8. এমন দু'টি সংখ্যা বের কর যাদের ভাগফল 15 এবং বিয়োগফল 420।

9. এমন একটি ভগ্নাংশ বের কর যার লবের সংগে 3 যোগ করলে ভগ্নাংশটি দ্বিগুণ হয়ে যায় আর হরের সংগে 1 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়ে যায়।

10. এমন একটি ভগ্নাংশ বের কর যার লব ও হর উভয়ের সংগে 1 যোগ করলে $\frac{3}{4}$ হয়, আর লব ও হর উভয়ের থেকে 1 বিয়োগ করলে $\frac{2}{3}$ হয়।

11. রাম ও শ্যামের নিকট একত্রে 750 টাকা, শ্যাম ও যদুর নিকট একত্রে 535 টাকা এবং যদু ও রামের নিকট একত্রে 645 টাকা আছে। কার নিকট কত টাকা আছে ?

12. A, B, C এর মধ্যে 1200 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন A ও B একত্রে C এর দ্বিগুণ পায় এবং B ও C একত্রে A এর 3 গুণ পায়।

13. A, B ও C এর মধ্যে 600 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন A ও B একত্রে C এর সমান পায় এবং A, B এর দ্বিগুণ পায়।

14. 5 বৎসর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হ'বে আর 5 বৎসর পূর্বে পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 55 বৎসর ছিল। বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়স কত ?

15. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 70 বৎসর, যখন পুত্রের বয়স পিতার বর্তমান বয়সের সমান হবে তখন উহাদের বয়সের সমষ্টি 118 হবে। বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়স কত ?

16. A, B এর থেকে 14 বছরের বড়। 30 বৎসর পূর্বে B এর বয়স A এর বয়সের তিন চতুর্থাংশ ছিল। A ও B এর বর্তমান বয়স কত ?

17. বর্তমানে পিতা ও তার দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টি 107 বৎসর, জ্যেষ্ঠ পুত্র কনিষ্ঠ পুত্রের চেয়ে 5 বৎরের বড়। পিতার বয়স যখন জ্যেষ্ঠ পুত্রের বর্তমান বয়সের সমান ছিল তখন তিন জনের বয়সের সমষ্টি 41 বৎসর ছিল। বর্তমানে প্রত্যেকের বয়স বের কর।

18. বর্তমানে পিতা ও দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টি 136 বৎসর, পিতার বয়স যখন জ্যেষ্ঠ পুত্রের বর্তমান বয়সের সমান ছিল তখন তাদের বয়সের সমষ্টি 61 বৎসর ছিল। আবার পিতার বয়স যখন কনিষ্ঠ পুত্রের বর্তমান বয়সের সমান ছিল তখন তাদের বয়সের সমষ্টি 52 বৎসর ছিল। বর্তমানে প্রত্যেকের বয়স কত ?

19. 18 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল আবার 3 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ ছিল। বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়স কত ?

20. দুই অঙ্ক বিশিষ্ট কোনও সংখ্যা এবং ঐ সংখ্যাটিকে উল্টিয়ে লিখলে যে সংখ্যা হয় তাদের যোগফল ও বিয়োগফল যথাক্রমে 99 ও 9 এবং সংখ্যাটির এককের অঙ্ক দশকের অঙ্ক থেকে বড়। সংখ্যাটি কত ?

21. মোট 26টি 3 পয়সা ও 5 পয়সার মুদ্রায় 1 টাকা হ'ল। কোন্ প্রকারের মুদ্রা কতগুলি আছে ?

22. একটি পশুখামারে মোরগ ও খরগোশে মিলে মোট 2000টি আছে এবং তাদের পায়ের মোট সংখ্যা 6300, খরগোশ ও মোরগের সংখ্যা কত।

23. ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 5 : 7 : 6 হলে প্রত্যেকটি কোণের মান বের কর।

24. রহিম কোনও একটি গতিবেগে কোনও নির্দিষ্ট দূরত্ব যায়। যদি তার বেগ ঘন্টায় $\frac{1}{2}$ কিলোমিটার বেশী হয় তবে সে আধঘন্টা আগে পোঁছে আবার তার বেগ ঘন্টায় 1 কিলোমিটার কম হ'লে $1\frac{1}{2}$ ঘন্টা পরে পোঁছে। দূরত্ব ও রহিমের গতিবেগ কত ?

25. যদু A থেকে B-তে দৌড় দিল। যদি সে ঘন্টায় আরও 1 কিলোমিটার বেশী যায় তবে তার 30 মিনিট সময় কম লাগে আর যদি ঘন্টায় আরও 1 কিলোমিটার কম যায় তবে তার 45 মিনিট সময় বেশী লাগে। A থেকে B এর দূরত্ব এবং যদুর গতিবেগ বের কর।

26. অমল ও বিমল 2 কিলোমিটার দৌড় প্রতিযোগিতায় নামল। প্রথমে অমল বিমলকে 50 মিটার সামনে রেখেও তাকে 102 সেকেণ্ডে হারাল। আবার দ্বিতীয়বার বিমল রওনা হবার $2\frac{1}{2}$ মিনিট পরে রওনা হয়ে অমল 100 মিটারে হেরে গেল। অমল ও বিমলের গতিবেগ বের কর।

27. X ও Y দু'টি ষ্টেশনের মধ্যে দূরত্ব 345 কিলোমিটার। দু'টি ট্রেন একই সঙ্গে দু'টি ষ্টেশন থেকে বিপরীত দিকে রওনা হ'ল। $4\frac{1}{2}$ ঘন্টা পরে তাদের মধ্যে দূরত্ব মাত্র 30 কিলোমিটারে দাঁড়াল। একটি ট্রেন অপরটি থেকে ঘন্টায় 10 কি.মি. বেশী গেলে ট্রেন দুটির গতিবেগ কত ?

28. একটি ট্রেন হাওড়া ষ্টেশন থেকে ছেড়ে বর্দ্ধমান ষ্টেশনে থামে। ট্রেনটি হাওড়া থেকে বেলা 8টায় ছাড়ল। ট্রেনটি ঘন্টায় 50 কি.মি. বেগে গেলে 15 মিনিট দেরীতে পৌঁছে। আবার ঐ ট্রেনটি ঘন্টায় 60 কি.মি. বেগে গেলে 5 মিনিট আগে পৌঁছে। হাওড়া থেকে বর্দ্ধমানের দূরত্ব এবং ট্রেনটির পৌঁছাবার সঠিক সময় বের কর।

29. 150 মিটার লম্বা একটি ট্রেন একই দিকে ঘন্টায় 8 কি. মি. বেগে ছুটন্ত একজন লোককে 15 সেকেণ্ডে অতিক্রম করল। কিছুক্ষণ বাদে ঐ ট্রেনটি একই দিকে চলন্ত অপর একজন লোককে 13·5 সেকেণ্ডে অতিক্রম করল। দ্বিতীয় লোকটির ও ট্রেনের গতিবেগ কত?

30. কোনও আয়তকার বাগানের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কমিয়ে প্রস্থ 5 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল 25 বর্গমিটার বেড়ে যায়। আবার ঐ বাগানের দৈর্ঘ্য 6 মিটার বাড়িয়ে প্রস্থ 4 মিটার কমালে ক্ষেত্রফল 4 বর্গমিটার কমে যায়। ঐ বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত?

31. একখানি নৌকা 10 ঘন্টায় স্রোতের অনুকূলে 30 কি.মি. ও প্রতিকূলে 14 কি.মি. যেতে পারে। আবার ঐ নৌকাটি 12 ঘন্টায় স্রোতের অনুকূলে 20 কি. মি. গিয়ে যাত্রাস্থলে ফিরে আসতে পা.র। নৌকা ও স্রো:তের গতিবেগ কত?

32. একজন লোক স্রোতের অনুকূলে 5 ঘন্টায় 30 কি.মি. সাঁতার কেটে গিয়ে আবার 15 ঘন্টায় যাত্রাস্থলে ফিরে আসতে পারে। স্রোত ও সাঁতারুর গতিবেগ কত।

33. একটি আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 70 মিটার। উহার দৈর্ঘ্য 3 মিটার বেশী ও প্রস্থ 3 মিটার কম হলে ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার কম হয়। বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত?

34. একটি বাগানের দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ, আর বাগানটির বাইরে চারদিকে 1 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। ঐ রাস্তা প্রতি বর্গমিটার 1 টাকা 25 পয়সা দরে মেরামত করতে মোট 51 টাকা 25 পয়সা খরচ হ'ল। বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত?

35. একজন লোক 820 টাকায় হু'টি ঘোড়া কিনল। প্রত্যেকটি ঘোড়া সে একই দরে বিক্রি করে একটিতে 15% লাভ এবং অপরটিতে 10% ক্ষতি করল, প্রত্যেক ঘোড়ার ক্রয়মূল্য কত?

36. A 8910 টাকায় B কে একটি বাড়ী বিক্রয় করায় 19% ক্ষতি হ'ল। B বাড়ীটি যে দামে C কে বিক্রয় করল A, B কে সেইদামে বিক্রয় করলে তার 17% লাভ হত। B কত টাকায় বাড়ীটি বিক্রয় করেছিল ?

37. 1250 টাকায় একটি ঘোড়া ও একটি গাড়ী কিনে ঘোড়াটি 20% লাভে এবং গরুটি 10% ক্ষতিতে বিক্রয় করায় মোট 2% লাভ হল। গাড়ী ও ঘোড়ার ক্রয়মূল্য কত ছিল ?

38. টাকায় 4টি দরে কতকগুলি আম এবং টাকায় 3টি দরে কতকগুলি আম কিনে মেশান হ'ল। মিশ্রিত আমের মধ্যে 15টি আম পচে গেল বাকী আমগুলির প্রত্যেকটি 40 পয়সা দরে বিক্রয় করায় মোট টা. 2·40 লাভ হ'ল। কোন্ প্রকারের আম কতগুলি কেনা হয়েছিল ?

39. 215 টাকা কুইন্টাল দরের চিনির সঙ্গে 210 টাকা দরের চিনি মিশিয়ে মোট 5 কুইন্টাল চিনি করা হল। এই মিশ্রিত চিনি 220 টাকা কুইন্টাল দরে বিক্রয় করায় মোট 40 টাকা লাভ হ'ল। কোন্ প্রকারের চিনি কত পরিমাণে ছিল ?

40. একজন লোক 900 কিলোমিটার পথের 600 কি.মি. ট্রেনে ও বাকি বাসে গেল। এ'তে তার মোট 16 ঘন্টা সময় লাগল। যদি সে 540 কি. মি. ট্রেনে গিয়ে বাকি পথ বাসে যেত তবে আরও 12 মিনিট সময় বেশী লাগত। ট্রেন ও বাসের গতিবেগ কত ?

41. 21 দিনে একটি জমি চাষ করতে হবে। যদি দিনে আরও 20 হেক্টর করে বেশী জমি চাষ করা যায় তবে মাত্র 15 দিনে চাষ শেষ হয়। জমির মোট পরিমাণ ও দিনে কত পরিমাণ জমি চাষ করা হচ্ছে নির্ণয় কর।

42. একটি কারখানার কর্মীরা 20 দিনে কয়েকটি ইঞ্জিন তৈরী করবে। যদি কর্মীরা দিনে আরও 2টি বেশী করে ইঞ্জিন তৈরী করতো তবে তারা 2 দিন আগেই আরওটি 8 বেশী ইঞ্জিন তৈরী করতে পারত। কতগুলি ইঞ্জিন তৈরী করতে হবে ?

43. একটি কাজ 32 দিনে শেষ করবার জন্য চুক্তি হ'ল। এ কাজে 12 জন লোক নিয়োগ করায় কাজটি 4 দিন আগেই শেষ হল, কিন্তু তারা

দৈনিক আরও 4 জনের কাজ বেশী করেছিল। নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ করতে হলে ও শ্রমিকেরা স্বাভাবিকভাবে কাজ করলে মোট কতজন শ্রমিকের দরকার ?

44. একজন পুরুষ, একজন স্ত্রীলোকের কাজের $\frac{5}{3}$ গুণ কাজ করতে পারে। যদি একজন পুরুষ ও একজন স্ত্রীলোক মিলে একটি কাজ 18 দিনে সম্পন্ন করে তবে 3 জন স্ত্রীলোক ঐ কাজটি কতদিনে শেষ করবে ?

45. একটি কাজ A ও B 6 ঘন্টায়, B ও C $7\frac{1}{2}$ ঘন্টায়, C ও A 10 ঘন্টায় শেষ করতে পারে। প্রত্যেকে পৃথক পৃথক ভাবে কতক্ষণে কাজটি শেষ করবে ?

46. A একটি কাজ 35 দিনে শেষ করতে পারে। ঐ কাজটি A ও B একত্রে $19\frac{4}{9}$ দিনে করতে পারে। প্রথমে A একাকী 14 দিন কাজ করার পর A ও C একত্রে $10\frac{1}{2}$ দিন কাজ করল, বাকী কাজ B একাই 3 দিনে শেষ করল। B ও C একত্রে কাজটি কত দিনে শেষ করতে পারে ?

47. 16 জন পুরুষ 9 দিনে যতগুলি বাক্স তৈরী করতে পারে 24 জন বালক 15 দিনে ঠিক ততগুলি বাক্স তৈরী করতে পারে। 6 জন পুরুষ 50 জন বালক সমসংখ্যক বাক্স তৈরী করতে কতদিন সময় নেবে ?

48. একটি চৌবাচ্চার 3টি নল একসংগে খুলে দিলে 16 ঘন্টায় পূর্ণ হয়। এদের মধ্যে একটি নল $13\frac{1}{3}$ ঘন্টায় এবং অপর একটি নল 20 ঘন্টায় আলাদা আলাদা ভাবে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করতে পারে। তৃতীয় নলটি কিভাবে কাজ করছে ?

49. একটি চৌবাচ্চায় A, B, C 3টি নল আছে। নল তিনটি একসঙ্গে খুলে দেওয়ায় 1 ঘন্টা পরে A নলটি বন্ধ করে দেওয়ায় $22\frac{1}{2}$ ঘন্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হ'ল। কিন্তু 1 ঘন্টা পরে A এর বদলে যদি B বা C নল বন্ধ করে দেওয়া যায় তবে অবশিষ্ট অংশ পূর্ণ হতে যথাক্রমে $8\frac{3}{5}$ ঘন্টা ও $1\frac{16}{27}$ ঘন্টা সময় লাগে। কোন্ নলটি কেমনভাবে কাজ করছে ?

50. একজন লোক বেড়াবার জন্য বাড়ীর বাইরে গেলেন। কিছুক্ষণ বাদে তিনি ফিরে এসে দেখলেন ঘড়ির কাঁটা দু'টি স্থান বিনিময় করেছে।

যদি তিনি

(*i*) 5টা ও 6টার মধ্যে বেরিয়ে 9টা ও 10টার মধ্যে ফিরে থাকেন

(*ii*) 7টা ও 8টার মধ্যে বেরিয়ে 10টা ও 11টার মধ্যে ফিরে থাকেন

(*iii*) 1টা ও 2টার মধ্যে বেরিয়ে 11টা ও 12টার মধ্যে ফিরে থাকেন

তবে তিনি কখন বাড়ী থেকে বেরিয়েছিলেন আর কখনই বা বাড়ীতে ফিরে এসেছিলেন ?

51. বাড়ী ভাড়া ঠিক থাকলে ও একটি পরিবারের লোকসংখ্যা 5 হ'লে মাসে 400 টাকা খরচ হয়। আর লোকসংখ্যা 7 হলে 500 টাকা খরচ হয়। ঐ পরিবারের লোকসংখ্যা 4 হলে মাসে কত টাকা করে খরচ হবে ? আর বাড়ী ভাড়া কত ?

52. চালের দাম কুইন্টাল প্রতি 150 টাকা হলে কোন গৃহস্থের প্রতি মাসে মোট 525 টাকা খরচ হয় এবং চালের দাম কুইন্টাল প্রতি 160 টাকা হলে প্রতি মাসে ঐ গৃহস্থের 540 টাকা খরচ হয়। চাল ছাড়া অন্যান্য খরচ কত এবং চালের দাম কুইন্টাল প্রতি 148 টাকা হ'লে প্রতি মাসে ঐ গৃহস্থের কত টাকা করে খরচ হ'বে ?

53. একটি মাঠের ঘাস প্রতিদিন সমহারে বৃদ্ধি পায়। ঐ মাঠের ঘাস 60টি গরু 80 দিনে অথবা 54টি গরু 90 দিনে খেতে পারে। (*i*) ক'টি গরু 48 দিনে ঐ মাঠের ঘাস শেষ করবে ? (*ii*) 86টি গরু কত দিনে ঐ ঘাস খেতে পারবে ?

54. দুইজন লোক শিয়ালদহ থেকে রাণাঘাট যাচ্ছে। তাদের সংগে মোট 300 কি. গ্রা মাল ছিল। এতে তাদেরকে যথাক্রমে 7·50 টাকা ও 5 টাকা মাশুল দিতে হল। সমস্ত মাল একজনের হলে মোট 13·75 টাকা মাশুল লাগত। একজনে কত মাল বিনা মাশুলে নিতে পারে এবং প্রত্যেকের কত মাল ছিল।

55. আয়করের হার 5% হলে একজন লোকের যে আয়কর লাগে, প্রথম 3,000 টাকায় কোনও আয়কর না লাগলে আর অবশিষ্ট আয়ের উপর 10% আয়কর দিলে একই পরিমাণ আয়কর দিতে হয়। ঐ ব্যক্তির আয় কত ?

56. পূর্বে প্রথম 3,000 টাকা আয়ের উপর কোনও আয়কর লাগত না, অবশিষ্ট আয়ের জন্য 10% আয়কর দিতে হত। বর্তমানে প্রথম 5000 টাকা আয়ের উপর কোনও কর লাগে না, অবশিষ্ট আয়ের উপর 15% কর দিতে হয়। একজন লোকের আয় পূর্বের আয়ের থেকে 1,000 টাকা বেড়ে যাওয়া সত্ত্বেও একই আয়কর দিতে হ'ল। লোকটির বর্তমান আয় কত ?

57. একটি ছাত্রাবাসে মাসিক খরচের কিছুটা অংশ স্থির (কর্মচারীর মাহিনা, বাড়ী ভাড়া করল ইত্যাদি বাবদ) এবং অপর অংশ ছাত্র সংখ্যার উপর নির্ভরশীল। ছাত্রাবাসে 60 জন ছাত্র থাকলে মাসে 3,500 টাকা খরচ হয়, কিন্তু 70 জন ছাত্র থাকলে 4,000 টাকা খরচ হয়। ঐ ছাত্রাবাসে 62 জন ছাত্র থাকলে কত খরচ হবে ?

58. 8টি বীজগণিত ও 5টি জ্যামিতি বইয়ের মূল্য একত্রে 48 টাকা এবং 9টি বীজগণিত ও 10টি জ্যামিতি বইয়ের মূল্য একত্রে 68 টাকা। 13টি বীজগণিত ও 14টি জ্যামিতি বইয়ের মূল্য একত্রে কত ?

চতুর্থ অধ্যায়

সরল সমীকরণের লেখচিত্র

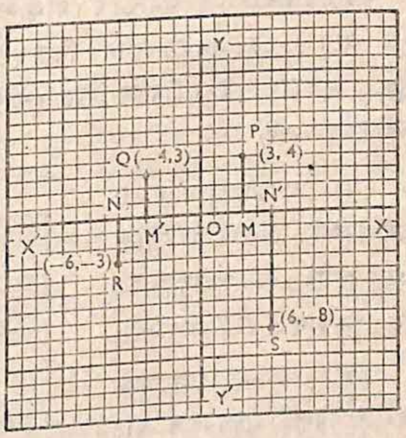
(Graphs of Simple equations)

§ 4·1 ছক কাগজে (graph paper) $X'OX$ এবং $Y'OY$ দু'টি পরস্পর লম্ব সরলরেখা টানা হল (1 নং চিত্র দ্রষ্টব্য)। এই সরলরেখা দু'টিকে অক্ষরেখা (axes) বলে, আর এদের ছেদবিন্দু O কে মূলবিন্দু (origin) বলে। $X'OX$ কে x-অক্ষ (x-axis) আর $Y'OY$ কে y-অক্ষ (y-axis) বলা হয়। নীচের নিয়মগুলি লক্ষণীয়—

(1) সাধারণতঃ ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে এক একক ধরা হয়। [যদিও বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে এর ব্যতিক্রম দেখা যায়।]

(2) সমস্ত গণনা মূলবিন্দু O থেকে শুরু করতে হ'বে।

(3) ধনাত্মক অঙ্ক গণনার জন্য O বিন্দু থেকে x-অক্ষ বরাবর ডান দিকে গুণে যেতে হবে আর y-অক্ষ বরাবর উপরের দিকে গুণে যেতে হ'বে।



(1নং চিত্র)

(4) ঋণাত্মক অঙ্ক গণনার সময় O বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর বাঁদিকে গুণতে হ'বে আর y-অক্ষের উপর নীচের দিকে গুণতে হবে।

§ 4·2 **বিন্দুস্থাপন ও তার স্থানাঙ্ক (Co-ordinates)**

উপরে 1 নং চিত্রে P ছক কাগজের উপর একটি বিন্দু। P থেকে $X'OX$ এর উপর PM লম্ব টানলাম। M ঐ লম্বের পাদবিন্দু। OM কে ভূজ

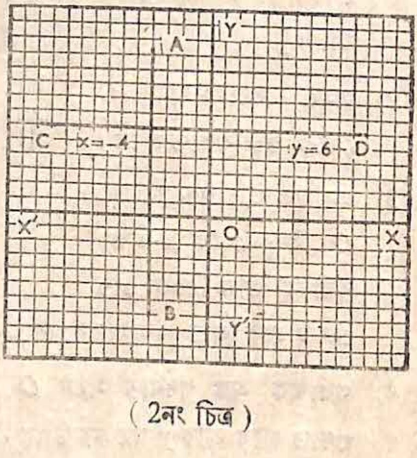
(abscissa) ও PM কে কোটি (ordinate) বলা হয়। এখানে P বিন্দুর ভূজ ও কোটি যথাক্রমে 3 ও 4 এরূপ ক্ষেত্রে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হ'ল (3, 4)। ছক কাগজে বিন্দু বসিয়ে পাশে স্থানাঙ্ক লিখে দিলেই বিন্দুটি বোঝা যায়। আবার যদি বলা যায় (−4, 3) বিন্দুটি 1নং চিত্রের ছক কাগজে বসাতে হবে তবে O বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর বাঁদিকে 4 ঘর গুণে M' বিন্দু পাওয়া যাবে। এবার M' বিন্দু থেকে উপরের দিকে 3 ঘর গুণলে Q বিন্দুটি পাওয়া যাবে। এই Q বিন্দুটিই উদ্দিষ্ট বিন্দু যার স্থানাঙ্ক (−4, 3)। অনুরূপভাবে ঐ একই চিত্রে R এবং S বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−6, −3) ও (6, −8)। মূল বিন্দু O এর স্থানাঙ্ক (0, 0)।

উদাহরণ 1. (*i*) $x=0$, (*ii*) $y=0$, (*iii*) $x=-4$, (*iv*) $y=6$ এই সমীকরণ চারটির লেখচিত্র আঁক।

(*i*) $x=0$ এই সমীকরণ থেকে স্পষ্ট বোঝা যায় x-এর মান সর্বদা শূন্য আর y-এর মান যে কোনও কিছু হ'তে পারে। অর্থাৎ ভূজ সবসময়েই শূন্য। সুতরাং এই সমীকরণ দিয়ে y-অক্ষ সূচিত হয়। অর্থাৎ $Y'OY$-এর সমীকরণ $x=0$.

(*ii*) অনুরূপভাবে $y=0$ সমীকরণটি x-অক্ষকে সূচিত করে অর্থাৎ $y=0$ সমীকরণটির লেখচিত্র হ'ল $X'OX$ অক্ষরেখা।

(*iv*) $x=-4$ হ'ল এমন একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ যার ভূজ সবসময়ই −4 অর্থাৎ বিন্দুটি সবসময়েই y-অক্ষ থেকে −4 একক দূরে। চিত্রে AB সরলরেখাটি $x=-4$ এর লেখ।



(2নং চিত্র)

স্পষ্টতঃ AB, y-অক্ষের সমান্তরাল।

(*iii*) অনুরূপভাবে $y=6$ এর লেখচিত্র হ'ল CD সরলরেখা এবং CD x-অক্ষের সমান্তরাল (2নং চিত্র)।

উদাহরণ 2. $2y=5x$ এর লেখচিত্র আঁক।

$2y=5x$

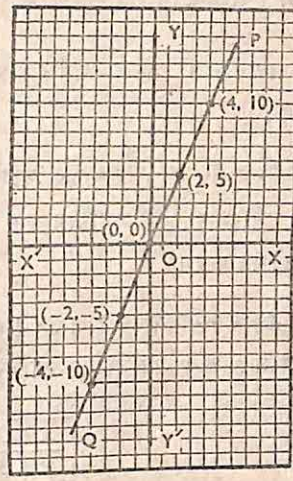
অথবা $y=\frac{5}{2}x$

x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর মান বের করে নীচের নিয়মে সাজান হল।

x	0	2	−2	4	−4
y	0	5	−5	10	−10

[সাধারণতঃ x ও y এর মান অখণ্ড রাশি বা শূন্য হলে সুবিধা হয়।]

এখন ছক কাগজে $X'OX$ এবং $Y'OY$ x ও y-অক্ষ আঁকলাম। ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, 0)$; $(2, 5)$; $(-2, -5)$; $(4, 10)$ এবং $(-4, -10)$ বিন্দুগুলি বসালাম। এখন দেখা যাবে এই সমস্ত বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত। এই বিন্দুগুলির মধ্যে দিয়ে ঐ সরল-রেখাটি আঁকা হ'ল। এই সরলরেখাটি হল $2y=5x$-এর লেখচিত্র।



(3 নং চিত্র)

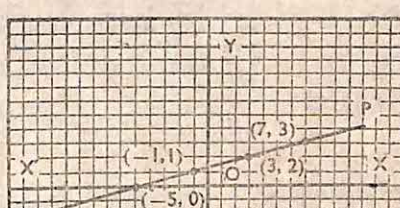
উদাহরণ 3. $\frac{x+5}{4}$ অপেক্ষকের (function) লেখ আঁক।

এখানে $y=\frac{x+5}{4}$ ধরলে যে লেখচিত্র হয় তাকেই $\frac{x+5}{4}$ অপেক্ষকের লেখ বলে।

x ও y এর মানের তালিকা

x	−1	3	7	−5
y	1	2	3	0

আগের মতো ছক কাগজের উপর $X'OX$ এবং $Y'OY$ দু'টি অক্ষ নিয়ে $(-1, 1)$; $(3, 2)$; $(7\ 3)$ ও $(-5, 0)$ বিন্দুগুলি স্থাপন করলাম।



(4 নং চিত্র)

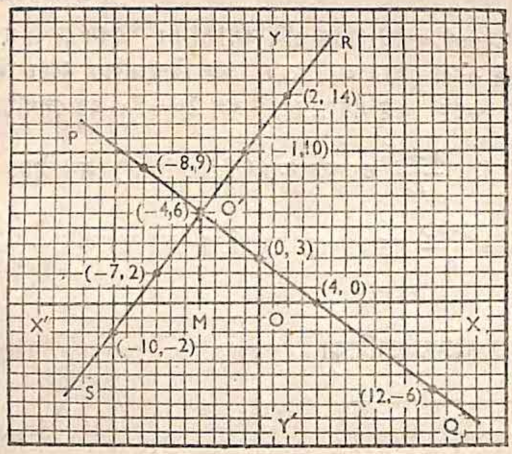
দেখা যাচ্ছে বিন্দুগুলি এক সরলরেখায় অবস্থিত। এ'দের মধ্যে দিয়ে সরলরেখাটি টানলেই $\frac{x+5}{4}$ অপেক্ষকের লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

লক্ষণীয়ঃ সরল সমীকরণের লেখচিত্র সব সময়েই একটি সরলরেখা হ'বে।

উদাহরণ 4. লেখচিত্র সাহায্যে $3x+4y=12$ এবং $4x-3y+34=0$ এই সমীকরণ দু'টি সমাধান কর এবং এই লেখচিত্র দু'টির মধ্যেকার কোণটি কত বের কর।

প্রথম সমীকরণটি হ'ল $3x+4y=12$ অর্থাৎ $y=3-\frac{3}{4}x$
এখানে x ও y এর মানের তালিকা হ'ল

x	0	4	12	−8
y	3	0	−6	9



(5 নং চিত্র)

আগের মতো ছক কাগজে $X'OX$ এবং $Y'OY$ দুটি অক্ষ নিয়ে (0, 3) ; (4, 0) ; (12, −6) ; (−8, 9) বিন্দু চারটি স্থাপন করলাম। এখন দেখা যায় এই বিন্দু চারটি সমরেখ। এদের মধ্য দিয়ে PQ সরলরেখাটি টানলাম। PQ সরলরেখাই $3x+4y=12$ সমীকরণের লেখ।

অনুরূপভাবে $4x-3y+34=0$ সমীকরণের x ও y এর মানের তালিকা

x	-10	-7	-1	2
y	-2	2	10	14

থেকে $(-10, -2)$; $(-7, 2)$; $(-1, 10)$; ও $(2, 14)$ বিন্দুগুলি একই ছক কাগজে বসিয়ে তাদের মধ্যে দিয়ে RS সরলরেখা টানা হল। RS সরলরেখাই এই সমীকরণের লেখ।

5 নং চিত্রে দেখা যাচ্ছে PQ ও RS সরলরেখা দুটি O' বিন্দুতে ছেদ করেছে। O' বিন্দুর ভূজ ও কোটি যথাক্রমে -4 ও 6, অর্থাৎ $(-4, 6)$ বিন্দুটি উভয়েরই সাধারণ বিন্দু। অতএব $x=-4$ ও $y=6$ উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=-4$, $y=6$

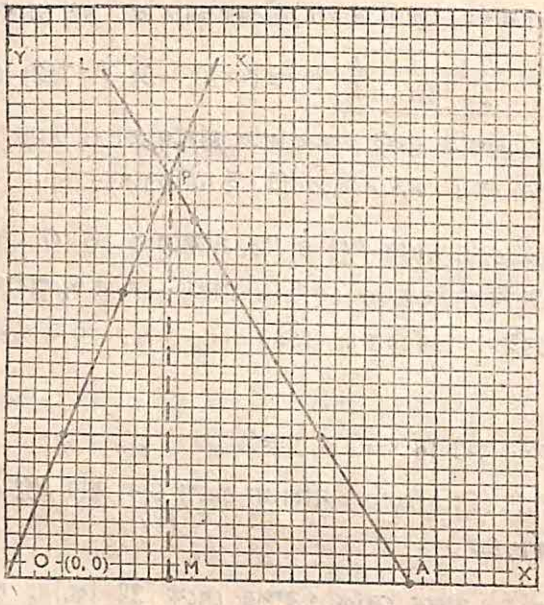
এখন চাঁদার (Protractor) সাহায্যে মেপে দেখা যায় PQ ও RS এর মধ্যেকার কোণ 90°।

উদাহরণ 5. দু'জন লোক পরস্পর থেকে 28 কি.মি. দূরে ছিল। তারা উভয়ে পরস্পরের দিকে একই সঙ্গে রওনা হ'ল। একজন ঘন্টায় 2 কি. মি. বেগে ও অপরজন ঘন্টায় 3 কি. মি. বেগে গেলে তারা কতক্ষণ পর মিলিত হবে লেখ সাহায্যে বের কর।

ছক কাগজে OX এবং OY দু'টি পরস্পর লম্ব অক্ষ নেওয়া হ'ল। মনে করা যাক্ মূলবিন্দু O তে প্রথম লোকটি আছে আর OX এর উপর A বিন্দুতে অপর লোকটি আছে যেখানে $OA=28$ কি.মি.। (এখানে ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 কি. মি. ধরা হয়েছে আর x অক্ষের দিকে দূরত্ব মাপা হচ্ছে এবং OY এর দিকে সময় মাপা হচ্ছে আর ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলির 5 গুণকে 1 ঘন্টা অর্থাৎ ছোট বর্গের বাহুকে 12 মিনিট ধরা হচ্ছে।)

x, O বিন্দু থেকে যে কোন লোকের দূরত্ব আর y সময় বোঝালে প্রথম লোকটির জন্য $x=2y$ এবং দ্বিতীয় লোকটির জন্য $28-x=3y$। প্রথম লোকটির জন্য x ও y-এর মানের তালিকা

x	0	4	8	12
y	0	2	4	6



(6 নং চিত্র)

এখন (0, 0), (4, 2), (8, 4), (   ) বিন্দুগুলি বসিয়ে যোগ করলে *OK* সরলরেখাটি প্রথম লোকটির সময়-দূরত্বের লেখচিত্র।

দ্বিতীয় লোকটির জন্য x ও y এর মানের তালিকা

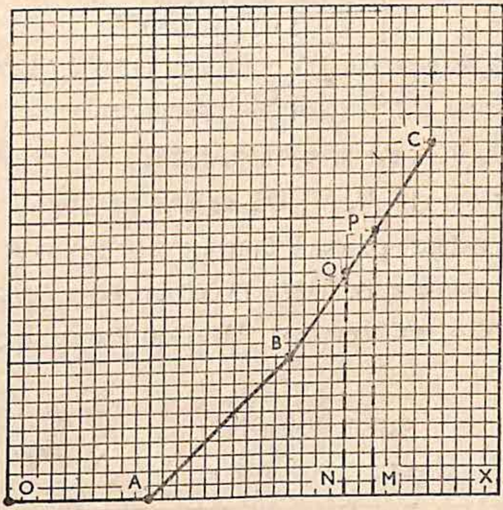
x	28	22	10	7	13
y	0	2	6	7	5

একই ছক কাগজে (28, 0) ; (22, 2) ; (10, 6) ; (7, 7) ও (13, 5) ; বিন্দুগুলি বসিয়ে তাদের মধ্য দিয়ে *AL* সরলরেখাটি টানলেই দ্বিতীয় লোকের সময়-দূরত্বের লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

OK ও *AL* সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু *P*, *P* বিন্দুর কোটি $\frac{14}{5}$ বা $2\frac{4}{5}$ ঘন্টা বা 2 ঘন্টা 48 মিনিট। সুতরাং যাত্রার 2 ঘন্টা 48 মিনিট পরে লোক দু'টি পরস্পর মিলিত হবে।

উদাহরণ 6. প্রথম 5,000 টাকা আয়ের জন্য কোন আয়কর দিতে হয় না। পরবর্তী 5,000 টাকা বা তার অংশবিশেষের জন্য 10% এবং তার পরের 5,000 টাকা বা তা অংশবিশেষের জন্য 15% আয়কর দিতে হয়। আয় 13,000 টাকা হ'লে কত আয়কর লাগে? আবার আয়কর 800 টাকা হ'লে আয় কত? (লেখ সাহায্যে সমাধান করতে হবে।)

OX ও OY দুটি অক্ষরেখা টানা হল।



7 নং চিত্র আয়কর লেখ

x-অক্ষের দিকে আয় এবং y-অক্ষের দিকে আয়কর মাপা হ'ল। x-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 500 টাকা আর y-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 50 টাকা ধরা হল।

কোনও লোকের আয়কে x ও আয়করকে y দিয়ে নির্দেশ করলে

(i) যখন $0 \leqslant x \leqslant 5{,}000$; $y=0$ অর্থাৎ x-অক্ষ

(ii) যখন $5{,}000 \leqslant x \leqslant 10{,}000$; $y=\frac{x-5{,}000}{10}=\frac{x}{10}-5{,}00$

(iii) যখন $10{,}000 \leqslant x \leqslant 15{,}000$; $y=500+(x-10{,}000)\ \frac{15}{100}$

$$=500+\cdot 15(x-10{,}000)$$
$$=\cdot 15x-1{,}000$$

(i)নং ক্ষেত্রে আয়করের লেখ OA, x-অক্ষের অংশবিশেষ

(ii)নং ক্ষেত্রে x ও y এর মানের তালিকা

x	5,000	10,000
y	0	500

ছক কাগজে (5000, 0) ও (10,000, 500) বিন্দু বসিয়ে তাদের মধ্য দিয়ে AB সরলরেখা টানলে এই অংশে আয়করের লেখ হবে।

—7

অনুরূপভাবে (*iii*)নং ক্ষেত্রে x ও y-এর মানের তালিকা

x	10,000	15,000
y	5,00	1,250

একই ছক কাগজে (10,000, 500) এবং (15,000, 1250) বিন্দু দুটি বসিয়ে যোগ করলে BC সরলরেখাটিই আয়করের লেখ হবে।

সুতরাং $OABC$ ই হল আয়করের লেখচিত্র।

এখন মনে করা যাক M, N ; OX-এর উপর দু'টি বিন্দু। ঐ বিন্দু দুটির মধ্যে দিয়ে লেখচিত্রের যে কোটি টানা যায় তারা লেখকে P ও Q বিন্দুতে এমন ভাবে ছেদ করে যে $OM=13{,}000$ টাকা এবং $QN=800$ টাকা। তখন ছবি থেকে স্পষ্ট দেখা যায় $PM=950$ টাকা আর $ON=12{,}000$ টাকা।

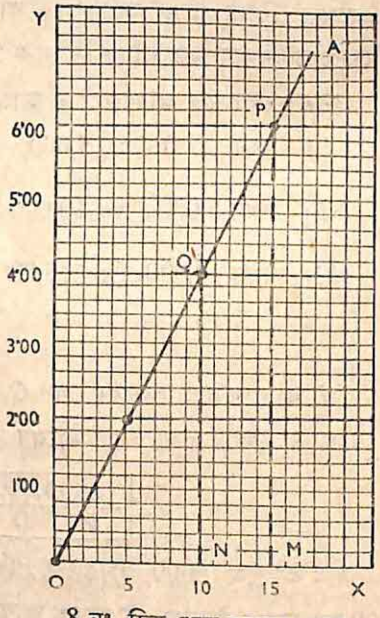
আয়কর 950 টাকা আয় 12,000 টাকা।	উত্তর

উদাহরণ 7. দু'টি লেবুর দাম 80 পয়সা হলে (*i*) 15টি লেবুর দাম ও (*ii*) 4 টাকায় ক'টি লেবু পাওয়া যাবে লেখচিত্রের সাহায্যে বের কর।

ছক কাগজে OX এবং OY দু'টি অক্ষরেখা টানা হল। O মূলবিন্দু, x-অক্ষের দিকে লেবুর সংখ্যা বসান হল অর্থাৎ x=লেবুর সংখ্যা এবং ছোট বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য=একটি লেবু। y-অক্ষের দিকে লেবুর মূল্য বসান হ'ল, অর্থাৎ $y=x$-টি লেবুর দাম এবং মনে করা যাক ছোট বর্গের একটি বাহু=·20 টাকা। $y=\cdot 4x$

x ও y এর মানের তালিকা

x	0	5	8
y	0	2·00	3·20



8 নং চিত্র লেবু মূল্যের লেখ

ঐ ছক কাগজে (0, 0) ; (5, 2·00) ও (8, 3·20) বিন্দুগুলি বসিয়া তাদের মধ্য দিয়ে সরলরেখাটি টানলেই লেবুর মূল্যের একটি লেখ পাওয়া যাবে। স্পষ্টতঃ লেখচিত্র থেকে দেখা যায়।

(*i*) 15টি লেবুর দাম 6 টাকা ও (*ii*) 4 টাকায় 10টি লেবু পাওয়া যায়	উত্তর

§ 4·4 প্রশ্নমালা—10

1. ছক কাগজে (0, 0) ; (0, 4) , (0, −6) ; (−8, 0) ; (7, 0) ; (4, 5) ; (4, − 5) ; (− 4, 5) ; (−4, − 5) বিন্দুগুলি স্থাপন কর।

2. নীচের অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র আঁক।

(*i*) $\frac{x-3}{2}$ (*ii*) $5x-3$ (*iii*) $\frac{2x+5}{3}$ (*iv*) $\frac{x+7}{8}$

3. নীচের সমীকরণগুলির লেখচিত্র আঁক।

(*i*) $2x+3y=12$ (*ii*) $3x+2y=12$
(*iii*) $2x-3y=12$ (*iv*) $3x-2y=12$
(*v*) $y=3x+5$ (*vi*) $2y=3x+2$
(*vii*) $4x-3y=0$ (*viii*) $x=9$
(*ix*) $y=5$ (*x*) $y=\frac{5}{3}x+\frac{7}{2}$
(*xi*) $3x+y+5=0$ (*xii*) $y=7x$
(*xiii*) $x=9y$ (*xiv*) $x=6y+5$
(*xv*) $7x+9=0$

4. নীচের সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর ও তাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক বের কর। (অথবা নীচের সমীকরণগুলি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।)

(*i*) $x+2y=3,\ x-y=0$
(*ii*) $x-y=5,\ \ x=6y$
(*iii*) $2x+3y=5,\ 3x-2y=1$
(*iv*) $x=9,\ 3y+x=0$
(*v*) $x+9y=0$; $2x+5y=0$
(*vi*) $3x+2y=6$; $2x-3y=4$
(*vii*) $x+3y+5=0$; $x-y=1$

অনুরূপভাবে (*iii*)নং ক্ষেত্রে x ও y-এর মানের তালিকা

x	10,000	15,000
y	5,00	1,250

একই ছক কাগজে (10,000, 500) এবং (15,000, 1250) বিন্দু দুটি বসিয়ে যোগ করলে BC সরলরেখাটিই আয়করের লেখ হবে।

সুতরাং $OABC$ ই হল আয়করের লেখচিত্র।

এখন মনে করা যাক M, N ; OX-এর উপর দু'টি বিন্দু। ঐ বিন্দু দুটির মধ্যে দিয়ে লেখচিত্রের যে কোটি টানা যায় তারা লেখকে P ও Q বিন্দুতে এমন ভাবে ছেদ করে যে $OM=13,000$ টাকা এবং $QN=800$ টাকা। তখন ছবি থেকে স্পষ্ট দেখা যায় $PM=950$ টাকা আর $ON=12,000$ টাকা।

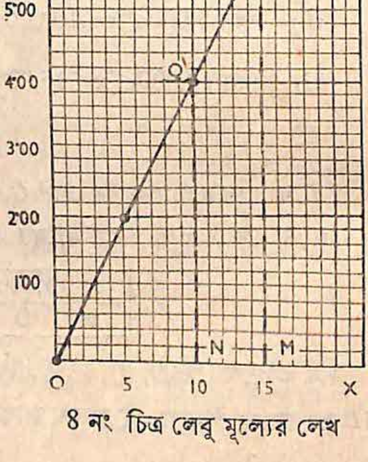
আয়কর 950 টাকা
আয় 12,000 টাকা। উত্তর

উদাহরণ 7. দু'টি লেবুর দাম 80 পয়সা হলে (*i*) 15টি লেবুর দাম ও (*ii*) 4 টাকায় ক'টি লেবু পাওয়া যাবে লেখচিত্রের সাহায্যে বের কর।

ছক কাগজে OX এবং OY দু'টি অক্ষরেখা টানা হল। O মূলবিন্দু, x-অক্ষের দিকে লেবুর সংখ্যা বসান হল অর্থাৎ $x=$লেবুর সংখ্যা এবং ছোট বর্গের 1 বাহুর দৈর্ঘ্য=একটি লেবু। y-অক্ষের দিকে লেবুর মূল্য বসান হ'ল, অর্থাৎ $y=x$-টি লেবুর দাম এবং মনে করা যাক ছোট বর্গের একটি বাহু=·20 টাকা। $y=·4x$

x ও y এর মানের তালিকা

x	0	5	8
y	0	2·00	3·20



8 নং চিত্র লেবু মূল্যের লেখ

ঐ ছক কাগজে (0, 0) ; (5, 2·00) ও (8, 3·20) বিন্দুগুলি বসিয়া তাদের মধ্য দিয়ে সরলরেখাটি টানলেই লেবুর মূল্যের একটি লেখ পাওয়া যাবে। স্পষ্টতঃ লেখচিত্র থেকে দেখা যায়।

(*i*) 15টি লেবুর দাম 6 টাকা ও (*ii*) 4 টাকায় 10টি লেবু পাওয়া যায়	উত্তর

§ 4·4 প্রশ্নমালা—10

1. ছক কাগজে (0, 0) ; (0, 4) , (0,−6) ; (−8, 0) ; (7, 0) ; (4, 5) ; (4, − 5) ; (− 4, 5) ; (−4, − 5) বিন্দুগুলি স্থাপন কর।

2. নীচের অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র আঁক।

   (*i*) $\frac{x-3}{2}$ (*ii*) $5x-3$ (*iii*) $\frac{2x+5}{3}$ (*iv*) $\frac{x+7}{8}$

3. নীচের সমীকরণগুলির লেখচিত্র আঁক।

   (*i*) $2x+3y=12$ (*ii*) $3x+2y=12$
   (*iii*) $2x-3y=12$ (*iv*) $3x-2y=12$
   (*v*) $y=3x+5$ (*vi*) $2y=3x+2$
   (*vii*) $4x-3y=0$ (*viii*) $x=9$
   (*ix*) $y=5$ (*x*) $y=\frac{5}{3}x+\frac{7}{2}$
   (*xi*) $3x+y+5=0$ (*xii*) $y=7x$
   (*xiii*) $x=9y$ (*xiv*) $x=6y+5$
   (*xv*) $7x+9=0$

4. নীচের সমীকরণগুলির লেখ অঙ্কিত কর ও তাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক বের কর। (অথবা নীচের সমীকরণগুলি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।)

   (*i*) $x+2y=3,\ x-y=0$
   (*ii*) $x-y=5,\ \ x=6y$
   (*iii*) $2x+3y=5,\ 3x-2y=1$
   (*iv*) $x=9,\ 3y+x=0$
   (*v*) $x+9y=0$; $2x+5y=0$
   (*vi*) $3x+2y=6$; $2x-3y=4$
   (*vii*) $x+3y+5=0$; $x-y=1$

(*viii*) $2x+3y=13$; $3x-2y=13$

(*ix*) $y=2x$; $x=2y$

(*x*) $y=3$; $x=y$

5. $\frac{3x+7}{4}$ অপেক্ষকটির লেখ আঁক। (*i*) x-এর মান কত হ'লে অপেক্ষকটির মান 0 (শূন্য) হবে আর (*ii*) $x=-1$ হলে অপেক্ষকটির মান কত ?

6. $7x+5y=2$ ও $5x-7y=5$; সমীকরণ দুটি লেখ এঁকে তাদের মধ্যে কোন কোণটি মেপে কত হয় বল।

7. $x+y=5$; $2x=3y$ এবং $3x-2y=5$; সমীকরণ তিনটির লেখ এঁকে দেখাও যে তারা সমবিন্দু।

8. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ সমীকরণের লেখ এঁকে অক্ষদ্ব'টির মধ্যবর্তী অংশের দৈর্ঘ্য বের কর।

9. একজন লোক ঘণ্টায় 3 কি.মি. বেগে 3 ঘণ্টা হেঁটে যাওয়ার পর ঘণ্টায় 5 কি.মি. বেগে সাইকেলে 5 ঘণ্টা গেল এবং সব শেষে ঘণ্টায় 20 কি.মি. বেগে বাসে 1 ঘণ্টা গেল। দূরত্ব ও সময়ের সম্বন্ধসূচক লেখ আঁক।

10. 5টি লেবুর দাম 1 টাকা হলে (*i*) 9টি লেবুর দাম ও (*ii*) 2 টাকা 40 পয়সায় কতগুলি লেবু পাওয়া যাবে লেখ চিত্রের সাহায্যে বের কর।

11. একটি চোর ঘণ্টায় 4 কি.মি. বেগে ছুটতে পারে আর একজন পুলিশ ঘণ্টায় 5 কি.মি. বেগে ছুটতে পারে। পুলিশ $\frac{1}{2}$ কি.মি. দূর থেকে চোরকে দেখতে পেল। তখন উভয়েই একই দিকে দৌড়াতে লাগল ; কতক্ষণ পরে ও কোথায় পুলিশ চোরকে ধরে ফেলবে ? (লেখ চিত্র সাহায্যে বের কর।)

পা টী গ ণি ত

প্রথম অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত

(Ratio and Proportion)

অনুপাত

§ 1·1. একজাতীয় দুটো রাশির তুলনা করে একটি রাশি অপরটির কত অংশ বা কত গুণ তা যে অখণ্ড বা খণ্ড সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সেই অনবচ্ছিন্ন সংখ্যাটিকে অনুপাত (Ratio) বলে।

যেহেতু অনুপাত দুটো রাশির তুলনামূলক সংখ্যামাত্র সেজন্য এর কোন একক নেই।

উপরোক্ত সংজ্ঞা থেকে বোঝা যায় যে দুটো সমজাতীয় রাশির অনুপাত নির্ণয় করতে হলে, প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দ্বারা ভাগ করতে হয় অর্থাৎ প্রথমটি হবে লব আর দ্বিতীয়টি হবে হর। যেমন—

(*i*) 10 ঘন্টা ও 5 ঘন্টার অনুপাত$=10$ ঘন্টা$\div 5$ ঘন্টা$=2$

(*ii*) a ও b এর অনুপাত $=\frac{a}{b}$

(*iii*) 5 গজ ও 4 ফুটের অনুপাত $=5$ গজ$\div 4$ ফুট
$=15$ ফুট$\div 4$ ফুট
$=\frac{15}{4}$

ভাগ চিহ্নকে অনেক সময় ঃ এই চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়। যেমন $4:5$ একে পড়বার সময় '4 অনুপাত 5' পড়তে হয়। $x:y$ কে 'x অনুপাত y' পড়া হয়।

§ 1·2. পূর্বরাশি ও উত্তররাশি—যে দুটো রাশির মধ্যে অনুপাত নির্ণয় করতে হয় তাদের প্রথমটি **পূর্বরাশি** (Antecedent) এবং দ্বিতীয় রাশিটিকে **উত্তররাশি** (Consequent) বলে। এই দুটো রাশিকে অনুপাতের দুটো পদ (term) বলে। যেমন $a:b$ এই অনুপাতে a কে পূর্বরাশি এবং b কে উত্তররাশি বলা হয়ে থাকে।

§ 1·3. গুরু অনুপাত ও লঘু অনুপাত—অনুপাতের রাশি দুটো সমান হ'লে তাকে **সাম্যানুপাত** (Ratio of equality) বলে। তখন ওর মান 1 হয়ে থাকে। কিন্তু যদি রাশি দুটো অসমান হয় তখন অনুপাতটিকে **বৈষম্যানুপাত** (Ratio of inequality) বলে।

কোন অনুপাতের পূর্বরাশি উত্তররাশি অপেক্ষা বড় বা ছোট হ'লে ঐ অনুপাতকে যথাক্রমে **গুরু অনুপাত** (Ratio of greater inequality) বা **লঘু অনুপাত** (Ratio of less inequality) বলে।

সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে গুরু অনুপাত 1 অপেক্ষা বড় এবং লঘু অনুপাত 1 অপেক্ষা সব সময় ছোট হবে।

এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে যে অনুপাতের পদ দুটো যে-কোন একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অনুপাতের মান অপরিবর্তিত থাকে। যেমন $4:5$, $8:10$, $12:15$, $4n:5n$ প্রভৃতি অনুপাতগুলো সমান। এর থেকে আমরা কোন্ অনুপাত বড় বা কোন্ অনুপাত ছোট তা বের করতে পারি।

§ 1·4. অন্যোন্যক (Reciprocal)—দুটো অনুপাতের মধ্যে যদি একটির পূর্বরাশি ও উত্তররাশি যথাক্রমে অন্যটির উত্তররাশি ও পূর্বরাশি হয় তবে অনুপাত দুটোর যে-কোনটিকে অন্যটির **অন্যোন্যক** (Reciprocal) বা **ব্যস্ত** বা **বিপরীত অনুপাত** (Inverse Ratio) বলা হয়।

যেমন $a:b$ এর ব্যস্ত অনুপাত $b:a$

দুটো ব্যস্ত অনুপাতের গুণফল সব সময় 1 হবে।

§ 1·5. সরল ও মিশ্র অনুপাত—

4 টাকা : 5 টাকা বা $a:b$ বা $m:n$ এধরনের অনুপাতকে বলে **সরল অনুপাত** (Simple Ratio)।

দুই বা ততোধিক অনুপাতের পূর্বরাশিগুলির ধারাবাহিক গুণফলকে নতুন পূর্বপদ এবং উত্তরপদগুলোর ধারাবাহিক গুণফলকে নতুন উত্তরপদ রূপে নিয়ে নতুন অনুপাত পাওয়া যায়, তাকে প্রদত্ত অনুপাতসমূহের **মিশ্র** বা **যৌগিক অনুপাত** (Compound Ratio) বলে। যথা $a:b$, $c:d$ ও $x:y$ অনুপাত তিনটির মিশ্র অনুপাত হবে $acx:bdy$

$x : y$ কে $x : y$ এর সঙ্গে সংযুক্ত করে পাওয়া $x^2 : y^2$ অনুপাতটিকে $x : y$ এর **দ্বিগুণানুপাত** (Duplicate Ratio) বলে।

এরকম তিনটি সমান অনুপাতের মিশ্র অনুপাতকে তাদের যে-কোনটির **ত্রিগুণানুপাত** (Triplicate Ratio) বলে। অতএব $a : b$ এর ত্রিগুণানুপাত হবে $a^3 : b^3$ ।

এভাবে যে কোন গুণানুপাত হতে পারে।

কোন দুটো রাশির অনুপাতের বর্গমূল নিয়ে যে অনুপাত পাওয়া যায় তাকে ঐ অনুপাতের **দ্বিভাজিত অনুপাত**(Sub-duplicate Ratio) বলে।

যথা $a : b$ এর দ্বিভাজিত অনুপাত $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ বা $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$; অনুরূপে $\sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{y}$ হ'লো $x : y$ এর **ত্রিভাজিত অনুপাত** (Sub-triplicate Ratio)

মনে রাখা উচিত

§ 1·6. অনুপাতের পদ দুটোর প্রত্যেকটির সঙ্গে একই সংখ্যা যোগ বা বিয়োগ করলে যথাক্রমে—

লঘু অনুপাত বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়

এবং গুরু অনুপাত হ্রাস বা বৃদ্ধি পায়।

সাম্যানুপাতের পদ দুটোর সঙ্গে একই রাশি যোগ করলে বা ওদের থেকে একই রাশি বিয়োগ করলে সাম্যানুপাতটির মান অপরিবর্তিত থাকে।

§ 1·7. উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. প্রশ্ন ঃ 25 : 37 অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে কোন্ সংখ্যা যোগ করলে ঐ অনুপাত 5 : 6 এ রূপান্তরিত হয়?

উত্তর ঃ মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা x

প্রদত্ত সর্তানুসারে $\frac{25+x}{37+x}=\frac{5}{6}$

অর্থাৎ $150+6x=185+5x$

অর্থাৎ $6x-5x=185-150$

অর্থাৎ $x=35$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি 35 উত্তর

উদাহরণ 2. প্রশ্ন ঃ দুধ রাখার জন্য তুমি চারজন গোয়ালার সাথে কথাবার্তা বলছ। প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় গোয়ালা যথাক্রমে বলল তাদের দুধে জল ও দুধের অনুপাত যথাক্রমে 2:5, 4:11, 22:35। চতুর্থ গোয়ালা কিছুক্ষণ চুপ করে বলল আমার দুধে জল ও দুধের অনুপাত আগের তিনটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত। বলতো চতুর্থ গোয়ালার দুধে জল ও দুধের অনুপাত কত ?

উত্তর ঃ প্রথম গোয়ালার দুধে জল ও দুধের অনুপাত 2 : 5

দ্বিতীয় " " " " " " 4 : 11

তৃতীয় " " " " " " 22 : 35

যেহেতু চতুর্থ গোয়ালার দুধে জল ও দুধের অনুপাত আগের তিনটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত, সুতরাং চতুর্থ গোয়ালার দুধে

জল ও দুধের অনুপাত $2\times4\times22 : 5\times11\times35$

$= 176 : 1925$

$= 16 : 175$

∴ নির্ণেয় অনুপাতটি 16 : 175 উত্তর

উদাহরণ 3. প্রশ্ন ঃ ক 5 দিনে 30 টাকা এবং খ 16 দিনে 112 টাকা বেতন পায়। উভয়ের দৈনিক বেতনের অনুপাত নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ ক-এর 5 দিনের বেতন 30 টাকা।

∴ ক-এর 1 দিনের বেতন $\frac{30}{5}=6$ টাকা।

এবার খ-এর 16 দিনের বেতন 112 টাকা।

∴ খ-এর 1 " " $\frac{112}{16}=7$ টাকা

∴ উভয়ের বেতনের অনুপাত 6 টাকা : 7 টাকা = 6 : 7 উত্তর

উদাহরণ 4. প্রশ্ন ঃ একটি কুকুর একটি খরগোশকে ধরবার জন্য ছুটল। কুকুরটি যতক্ষণে 6 বার লাফায় খরগোশটি ততক্ষণে 8 বার লাফায় ; কিন্তু কুকুরের 2 লাফ খরগোশের 4 লাফের সমান। উভয়ের গতির অনুপাত কত ?

উত্তর ঃ ধরো, কুকুর 1 লাফে y ফুট যায়

খরগোশ 1 লাফে x ফুট যায়

সর্তানুসারে, কুকুরের 2 লাফ খরগোশের 4 লাফের সমান

অর্থাৎ $2y=4x$

অর্থাৎ $\frac{y}{x}=\frac{4}{2}=2\cdots\cdots$ (1)

আবার দেওয়া আছে যে

কুকুরটি যতক্ষণে 6 বার লাফায়

খরগোশটি ততক্ষণে 8 বার লাফায়

অর্থাৎ একই সময়ে কুকুরটি যায় $6y$ ফুট

আর খরগোশটি যায় $8x$ ফুট।

∴ কুকুর আর খরগোশের গতির

অনুপাত $=6y : 8x$

$=\frac{6y}{8x}$

$=\frac{6}{8}\times\frac{y}{x}$

$=\frac{6}{8}\times 2$ ...... [(1) থেকে পাই]

$=\frac{12}{8}$

$=\frac{3}{2}$

∴ নির্ণেয় অনুপাত অর্থাৎ

| কুকুর আর খরগোশের গতির অনুপাত 3 : 2 | উত্তর

উদাহরণ 5. প্রশ্ন ঃ রামের বয়স : যদুর বয়স = 4 : 5 ;
রামের বয়স 20 বৎসর হ'লে যদুর বয়স কত ?

উত্তর ঃ মনে কর, যদুর বয়স x বৎসর, দেওয়া আছে
রামের বয়স 20 বৎসর

সর্তানুসারে $\frac{20}{x}=\frac{4}{5}$

∴ $x=20\times\frac{5}{4}=25$

∴ | যদুর বয়স 25 বৎসর | উত্তর

উদাহরণ 6. প্রশ্ন ঃ 225 টাকা তোমাকে দিয়ে বলা হ'লো এই টাকা রাম আর শ্যামের মধ্যে এমনভাবে ভাগ করে দাও যাতে রাম আর শ্যামের টাকার অনুপাত হয় 4 : 11

উত্তর ঃ ধরো, রামকে দিলে x টাকা

শ্যামকে দিলে y টাকা

সর্তানুসারে, $x : y = 4 : 11 = \frac{4}{11}$

অর্থাৎ $\frac{x}{y} = \frac{4}{11}$

অর্থাৎ $x = \frac{4}{11} y$ ...... (1)

আবার $x + y = 225$

অর্থাৎ $\frac{4}{11} y + y = 225$ (1) থেকে

অর্থাৎ $\frac{15}{11} y = 225$

অর্থাৎ $y = 225 \times \frac{11}{15}$

$= 165$

এবং $x = \frac{4}{11} y = \frac{4}{11} \times 165$

$= 60$

∴ রাম পাবে 60 টাকা
শ্যাম পাবে 165 টাকা উত্তর

উদাহরণ 7. প্রশ্ন ঃ রাম, শ্যাম ও যদুর মধ্যে 180 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যাতে রাম এবং শ্যামের টাকার অনুপাত 2 : 3 ও শ্যাম এবং যদুর টাকার অনুপাত 3 : 4 ; রাম, শ্যাম, যদু কে কত টাকা পাবে ?

উত্তর ঃ মনে কর, রাম পাবে x টাকা

শ্যাম পাবে y টাকা

যদু পাবে z টাকা

সর্তানুসারে, $x : y = 2 : 3$

অর্থাৎ $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

অর্থাৎ $y = \frac{3}{2} x$ ...... (1)

সর্তানুসারে, $y : z = 3 : 4$

অর্থাৎ $\frac{y}{z} = \frac{3}{4}$

অর্থাৎ $z = \frac{4}{3}y$

$= \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}x$ ...... (1) থেকে পাই

$= 2x$ ...... (2)

আবার দেওয়া আছে $x + y + z = 180$

সুতরাং $x + \frac{3}{2}x + 2x = 180$ (1) ও (2) থেকে পাই

অর্থাৎ $\frac{9}{2}x = 180$

অর্থাৎ $x = \cancel{180}^{20} \times \frac{2}{\cancel{9}} = 40$

$y = \frac{3}{2}x$ ...... (1) থেকে পাই

$= \frac{3}{\cancel{2}} \times \cancel{40}^{20}$

$= 60$

$z = 2x$ ...... (2) থেকে পাই

$= 2 \times 40$

$= 80$

∴

রাম	পাবে	40	টাকা	উত্তর
শ্যাম	পাবে	60	টাকা	
যদু	পাবে	80	টাকা	

উদাহরণ 8. প্রশ্ন ঃ ক ও খ-এর টাকার অনুপাত $\frac{4}{5}$; খ-এর টাকা গ-এর টাকার 2 গুণ হলে ক ও গ-এর টাকার অনুপাত বের কর।

উত্তর ঃ মনে কর, ক এর টাকা x টাকা

খ এর টাকা y টাকা

গ এর টাকা z টাকা

সর্তানুসারে,

$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ অর্থাৎ $y = x\frac{5}{4}$ (1)

এবং $\frac{y}{z}=2$ অর্থাৎ $z=\frac{y}{2}=\frac{5}{4}x\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}x$

$\therefore \quad x:z=\frac{8}{5}=8:5$

∴ | ক ও গ এর টাকার অনুপাত 8 : 5 | উত্তর

উদাহরণ 9. প্রশ্ন ঃ 3 ঃ 8 অনুপাতে জল ও দুধ মিশিয়ে 44 কিলোগ্রাম হ'লো। জল ও দুধের পরিমাণ বের কর।

উত্তর ঃ ধরো, জলের পরিমাণ x কিলোগ্রাম

দুধের পরিমাণ y কিলোগ্রাম

সর্তানুসারে,

$x:y=3:8$

অর্থাৎ $\frac{x}{y}=\frac{3}{8}$ অর্থাৎ $y=\frac{8}{3}x\cdots\cdots$ (1)

আরও দেওয়া আছে,

$x+y=44$

অর্থাৎ $x+\frac{8}{3}x=44$ (1) থেকে পাই

অর্থাৎ $\frac{11}{3}x=44$

অর্থাৎ $x=\overset{4}{\cancel{44}}\times\frac{3}{\cancel{11}}=12$

এবং $y=\frac{8}{3}x=\frac{8}{\cancel{3}}\times\overset{4}{\cancel{12}}$

$=32$

∴ | জলের পরিমাণ 12 কিলোগ্রাম
দুধের পরিমাণ 32 কিলোগ্রাম | উত্তর

উদাহরণ 10. প্রশ্ন ঃ এক গোয়ালার কাছ থেকে তুমি 2 কেজি. দুধ রাখলে। জানতে পারলে ঐ দুধে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত 1 : 3। আর এক গোয়ালার কাছ থেকে তুমি আরও 3 কেজি. দুধ রাখলে। জানতে পারলে ঐ দুধে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত 1 : 2। এবার ঐ দুই-রকমের দুধ যদি মিশিয়ে দাও, তাহলে ঐ মিশ্রিত দুধে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত বের কর।

উত্তর ঃ মনে কর, প্রথম দুধে জলের পরিমাণ x কেজি.

দুধের পরিমাণ y কেজি.

সর্তানুসারে, $x : y = 1 : 3$

অর্থাৎ $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$

অর্থাৎ $y = 3x$

আরও দেওয়া আছে $x + y = 2$

$\therefore\ x + 3x = 2$

অর্থাৎ $4x = 2$

অর্থাৎ $x = \frac{1}{2}$

এবং $y = 3x = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ প্রথম দুধে জলের পরিমাণ $\frac{1}{2}$ কেজি.

দুধের পরিমাণ $\frac{3}{2}$ কেজি.

এবার মনে কর, দ্বিতীয় দুধে

জলের পরিমাণ A কেজি.

দুধের পরিমাণ B কেজি.

সর্তানুসারে,

$A : B = 1 : 2$

অর্থাৎ $\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$

অর্থাৎ $B = 2A$

আরও দেওয়া আছে

$A + B = 3$

$\therefore\ A + 2A = 3$

অর্থাৎ $3A = 3$

অর্থাৎ $A = 1$

এবং $B = 2A$

এবং $B = 2 \times 1 = 2$

$\therefore$ দ্বিতীয় দুধে জলের পরিমাণ 1 কেজি.

দুধের পরিমাণ 2 কেজি.

∴ দুই রকমের দুধ মেশালে,

মিশ্রিত দুধে জলের পরিমাণ $=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ কেজি.

দুধের পরিমাণ $=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$ কেজি.

∴ মিশ্রিত দুধে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত $=\frac{3}{2}:\frac{7}{2}=3:7$ উত্তর

উদাহরণ 11. প্রশ্ন ঃ রাম ও বাচ্চুর বয়সের সমষ্টি 55 বৎসর। 5 বৎসর পূর্বে তাদের বয়সের অনুপাত ছিল 4 : 5। 5 বৎসর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে ?

উত্তর ঃ মনে কর, রামের বর্তমান বয়স x বৎসর

বাচ্চুর বর্তমান বয়স y বৎসর।

∴ সর্তানুসারে $x+y=55\cdots\cdots$ (1)

আবার $\frac{x-5}{y-5}=\frac{4}{5}$

অর্থাৎ $5x-25=4y-20$

অর্থাৎ $5x-4y=25-20=5\cdots\cdots$ (2)

(1)কে 4 দিয়ে গুণ করে (2)এর সঙ্গে যোগ করলে পাওয়া যায়

$$4x+4y+5x-4y=55\times4+5$$

অর্থাৎ $9x=220+5=225$

অর্থাৎ $x=\frac{225}{9}=25$

$y=55-25=30$

∴ রামের বর্তমান বয়স $=25$ বৎসর
বাচ্চুর বর্তমান বয়স $=30$ বৎসর উত্তর

5 বৎসর পরে রামের বয়স হবে $25+5=30$ বৎসর।

" " " বাচ্চুর বয়স হবে $30+5=35$ বৎসর।

∴ 5 বৎসর পরে রামের বয়স ও বাচ্চুর বয়সের অনুপাত হবে $30\div35=6:7$ উত্তর

উদাহরণ **12.** প্রশ্ন : চার বৎসর আগে বীরুর বয়স ও হারুর বয়সের অনুপাত ছিল 7 : 9, চার বৎসর পরে তাদের বয়সের অনুপাত হবে 9 : 11, বীরু ও হারুর বর্তমান বয়স কত হবে ?

উত্তর : ধরো, বীরুর বর্তমান বয়স x বৎসর,

হারুর বর্তমান বয়স y বৎসর।

সর্তানুসারে,

$$\frac{x-4}{y-4}=\frac{7}{9}\cdots\cdots \quad (1)$$

এবং $$\frac{x+4}{y+4}=\frac{9}{11}\cdots\cdots \quad (2)$$

(1) থেকে পাই $9x-36=7y-28$

অর্থাৎ $9x-7y=36-28=8\cdots\cdots$ (3)

এবং (2) থেকে পাই $11x+44=9y+36$

অর্থাৎ $11x-9y=-8\cdots\cdots$ (4)

(3) কে 9 দিয়ে গুণ করে এবং

(4) কে 7 দিয়ে গুণ করে আগের থেকে বিয়োগ করলে

পাওয়া যায় $81x-63y$

$-77x+63y=8\times9+8\times7$

অর্থাৎ $4x=72+56$

$=128$

অর্থাৎ $x=\frac{128}{4}=32$

এবং $-7y=8-9x$ (3) থেকে পাই

$=8-9\times32=8-288=-280$

$7y=280$

অর্থাৎ $y=\frac{280}{7}=40$

$\therefore$ বীরুর বর্তমান বয়স 32 বৎসর
হারুর বর্তমান বয়স 40 বৎসর — উত্তর

§ **1·8.** সমানুপাত।

দুটি অনুপাত সমান হওয়াকে সমানুপাত (proportion) বলা হয়। কোন এক জোড়া রাশির অনুপাত অপর এক জোড়া রাশির অনুপাতের সমান হলে রাশি চারটিকে সমানুপাতী বা সমানুপাতিক (proportional) বলা হয়। আরও স্পষ্টভাবে, যদি $a:b=c:d$ হয়, তবে বলা হয় a, b, c, d

সমানুপাতী। এই সমানুপাত প্রকাশ করার ভঙ্গী হল, $a : b :: c : d$ লেখা। তাহলে

$$a : b = c : d \quad ও \quad a : b :: c : d \qquad (1)$$

লেখা দুটি একার্থবোধক। প্রথম লেখাটিতে দুটি অনুপাতের সমতা প্রকাশ পাচ্ছে। দ্বিতীয়টিতে এ সমতা প্রকাশ ছাড়াও চারটি রাশির মধ্যে জোড়ায় জোড়ায় তুলনা করার একটি ভাব মনের মধ্যে জাগান হচ্ছে।* লেখা দুটিতে এইমাত্র তফাত। এই তুলনা করার ভাব মনের মধ্যে না রেখে উপরের লেখাগুলিকে তাহলে বিকল্পে এভাবেও লেখা যায়ঃ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (2)$$

রাশি চারটির প্রথম ও শেষ রাশিকে (a ও d কে) **প্রান্তীয় রাশি বা অন্ত্য** (extremes), দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে (b ও c কে) **মধ্য রাশি বা মধ্যক** (means) বলা হয়। চতুর্থ রাশিকে প্রথম তিনটি রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (fourth proportional) বলা হয়।

(2) থেকে সমানুপাতিক চারটি রাশি a, b, c, d-র মধ্যে নিচের সম্পর্কটি লক্ষ্য করা যায়ঃ

$$ad = bc,$$

অর্থাৎ প্রান্তীয় রাশি দুটির গুণফল = মধ্য রাশি দুটির গুণফল।

উদাহরণ। 2 মিটার ও 3 মিটার এবং 10 সেকেণ্ড ও 15 সেকেণ্ড সমানুপাতী। সমানুপাত প্রকাশের উপরিলিখিত রীতি অনুযায়ী

2 মিটার : 3 মিটার : : 10 সেকেণ্ড : 15 সেকেণ্ড

ক্রমিক সমানুপাত।

কতকগুলি রাশি যদি এমন হয় যে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাত, ইত্যাদি সমান, তবে রাশিগুলিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (continued proportion) বলা হয়। $a, b, c, d, \cdots$ ক্রমিক সমানুপাতী বলা হয় যখন তাদের মধ্যে এই সম্পর্ক থাকেঃ

$$a : b = b : c = c : d = \cdots$$

এ প্রসঙ্গে লক্ষণীয় যে রাশিগুলিকে ক্রমিক সমানুপাতী হতে হলে তাদেরকে অবশ্যই একজাতীয় হতে হবে। এটি সংজ্ঞার অনুবন্ধী (consequence)।

* অবশ্য প্রথমটিতেও এই ভাব সুপ্ত রয়েছে।

তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হলে দ্বিতীয় রাশিকে অপর দুটি রাশির মধ্য সমানুপাতী (mean proportional) এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম দুটি রাশির তৃতীয় সমানুপাতী (third proportional) বলা হয়। a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে

$$a : b = b : c$$

বা, $$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\therefore \quad b^2 = ac$$

$$\therefore \quad b = \sqrt{ac}\,।$$

একে মধ্য সমানুপাত নির্ণয় করার সূত্ররূপে ব্যবহার করা যায়।

উদাহরণ। 3 গ্রাম, 15 গ্রাম ও 75 গ্রাম ক্রমিক সমানুপাতী। 15 গ্রাম, 3 গ্রাম ও 75 গ্রাম এর মধ্য সমানুপাতী।

ধারাবাহিক অনুপাত।

$a, b, c, d, \cdots$ কতকগুলি রাশি এবং $x, y, z, t, \cdots$ সমসংখ্যক অপর কতকগুলি রাশির মধ্যে যদি

$$a : x = b : y = c : z = d : t = \cdots$$

সম্পর্ক থাকে তবে সে সম্পর্ককে এভাবে প্রকাশ করা হয়ঃ

$$a : b : c : d : \cdots = x : y : z : t : \cdots$$

$a, b, c, d, \cdots$ এদের মধ্যে $a : b : c : d : \cdots$ এরূপ পারস্পরিক অনুপাতকে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়।

উদাহরণ। 3 গ্রাম, 12 গ্রাম, 15 গ্রাম ও 21 গ্রামের ধারাবাহিক অনুপাত হল

3 গ্রাম : 12 গ্রাম : 15 গ্রাম : 21 গ্রাম

$= 3 : 12 : 15 : 21$

$= 1 : 4 : 5 : 7$

এক্ষেত্রে $\frac{3 \text{ গ্রাম}}{1} = \frac{12 \text{ গ্রাম}}{4} = \frac{15 \text{ গ্রাম}}{5} = \frac{21 \text{ গ্রাম}}{7}$ হয়।

§ 1·9 প্রশ্নমালা

1. 27 : 35 এর পূর্ব ও উত্তররাশির সাথে কোন্ সংখ্যা যোগ করলে ওই অনুপাত 4 : 5 এ রূপান্তরিত হয়?

2. তিনটি গোয়ালার দুধে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত 1 : 2, 2 : 3, 1 : 3। চতুর্থ গোয়ালার দুধে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত আগের তিনটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত হ'লে চতুর্থ গোয়ালার দুধে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত বের কর।
3. কমল 6 দিনে 60 টাকা এবং সুভাষ 9 দিনে 108 টাকা বেতন পেলে তাদের বেতনের অনুপাত বের কর।
4. কোন চৌকিদার একটি চোরকে ধরবার জন্য ছুটল। চৌকিদার যে সময়ে 5 বার পদক্ষেপ করে, চোর ততক্ষণে 6 বার পদক্ষেপ করে কিন্তু চৌকিদার 7 বার পদক্ষেপে যতদূর যায়, চোর 12 বার পদক্ষেপে ততদূর যায়। উভয়ের গতিবেগের অনুপাত কত ?
5. রামের বয়স : যদুর বয়স = 4 : 7 হ'লে এবং যদুর বয়স 35 বৎসর হ'লে রামের বয়স কত ?
6. ক 12 দিনে 108 কিলোমিটার এবং খ 9 দিনে 81 কিলোমিটার চলে। উভয়ের গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর।
7. নিম্নের অনুপাতগুলিকে মানের ক্রম অনুসারে লেখ :
   (i) 6 : 14, 5 : 23, 4 : 7
   (ii) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$
8. 5 : 9, 11 : 15, 11 : 25 এগুলোর মিশ্র অনুপাত বের কর।
9. 324 টাকাকে 11 : 7 অনুপাতে ধীরু ও বীরুর মধ্যে ভাগ করে দিলে কে কত পাবে ?
10. $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$ কে পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ কর।
11. 120 টাকা রাম, শ্যাম ও যদুর মধ্যে এমনভাবে ভাগ করে দাও যাতে রাম ও শ্যামের টাকার অনুপাত 1 : 2 এবং শ্যাম ও যদুর টাকার অনুপাত 2 : 3 হয়।
12. রহিমের বর্তমান বয়স 20 বৎসর এবং করিমের বর্তমান বয়স 16 বৎসর। 4 বৎসর আগে তাদের বয়সের অনুপাত কত ছিলো ?
13. তুমি 5 কে. জি. দুধ কিনলে এবং জানতে পারলে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত 1 : 4 ; বলতো ঐ কেনা দুধে খাঁটি দুধের পরিমাণ কত ?

14. রাম প্রথম 5 দিন, দিনে 5 টাকা বেতনে কাজ করল, পরের 5 দিন, দিনে 9 টাকা বেতনে কাজ করল। যদু কিন্তু ঐ 10 দিন, দিনে 6 টাকা বেতনে কাজ করল। ঐ 10 দিনে তাদের উপার্জিত টাকার অনুপাত কত ?

15. ক ও খ এর টাকার অনুপাত 5 : ৬, খ এর টাকা গ এর টাকার 2 গুণ হ'লে ক ও গ এর টাকার অনুপাত বের কর।

16. 4 : 15 অনুপাতে জল মিশিয়ে 76 কিলোগ্রাম হ'লো। জল ও দুধের পরিমাণ বের কর।

17. এক গোয়ালার কাছ থেকে প্রথমে 2 : 3 অনুপাতে জল মিশ্রিত 5 কে. জি. দুধ কিনলে। তারপর আর এক গোয়ালার কাছ থেকে 3 : 4 অনুপাতে জল মিশ্রিত 7 কে. জি. দুধ কিনলে। এই দুই রকম দুধ মেশালে মিশ্রিত দুধে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত কত ?

18. কেষ্ট আর হারুর বয়সের সমষ্টি 70 বৎসর। 10 বৎসর আগে তাদের বয়সের অনুপাত ছিল 2 : 3। 10 বৎসর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে ?

19. 10 বৎসর আগে বীরুর বয়স ও হারুর বয়সের অনুপাত ছিল 1 : 3। 10 বৎসর পরে তাদের বয়সের অনুপাত হবে 3 : 5। বীরু ও হারুর বর্তমান বয়স কত ?

20. দেবু, শিবু, মানিক তিনজনের বয়সের সমষ্টি 84 বৎসর। দেবু আর শিবুর বয়সের অনুপাত 1 : 2 এবং শিবু ও মাণিকের বয়সের অনুপাত 1 : 2 হ'লে কার কত বয়স ?

21. কেষ্ট যদি তার টাকা থেকে 10 টাকা মদনকে দেয় তবে তার টাকা ও মদনের টাকার অনুপাত 3 : 7 হয়, আর যদি মদন তার টাকা থেকে 10 টাকা কেষ্টকে দেয় তবে কেষ্ট আর মদনের টাকা সমান হয়ে পড়ে। বলত কার কত টাকা আছে ?

22. তুমি যদি অঙ্কে আরও 10 নম্বর বেশী পেতে তবে তোমার অঙ্কের নম্বর আর হারুর অঙ্কের নম্বরের অনুপাত হতো 8 : 5, আর যদি 10 নম্বর কম পেতে তবে এই অনুপাত দাঁড়াতো 6 : 5। বলতো হারু কত পেয়েছে ?

23. দুই অংকের এমন একটি সংখ্যা বের কর যার দশকের অংক ও এককের অংকের অনুপাত 1 : 2, কিন্তু সংখ্যাটির সাথে 18 যোগ করলে যে সংখ্যা দাঁড়ায় তার দশকের অংক ও এককের অংকের অনুপাত 2 : 1।

24. এমন একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ বের কর যার নীচের সংখ্যা উপরের সংখ্যার চাইতে 1 বড়, কিন্তু ভগ্নাংশটির সাথে $\frac{5}{6}$ যোগ করলে ভগ্নাংশটি উল্‌টিয়ে যায় অর্থাৎ নীচের সংখ্যা উপরে আসে আর উপরের সংখ্যা নীচে যায়।

25. এমন একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ বের কর যার নীচের সংখ্যা উপরের সংখ্যার চাইতে 1 বড়, কিন্তু ভগ্নাংশটির সাথে তার উল্টো সংখ্যাটি যোগ করলে $\frac{5}{2}$ হয়।

26. এক গোয়ালার কাছ থেকে 3 : 5 অনুপাতে জল মিশ্রিত 15 কে. জি. দুধ কিনলে। তারপর আর এক গোয়ালার কাছ থেকে 1 : 3 অনুপাতে 12 কে. জি. দুধ কিনলে। এবার এই দুই রকমের দুধ মিশিয়ে দিলে মিশ্রিত দুধে জল ও দুধের পরিমাণের অনুপাত কত ?

27. প্রথমে তুমি 2 কে. জি. দুধ কিনলে। তারপরে যে 2 কে. জি. দুধ কিনলে তার দর আগের দরের দ্বিগুণ। তারপর আরও 2 কে. জি. দুধ কিনলে। এর দর প্রথম কেনা দুধের দরের 3 গুণ। এবার এই তিন রকমের দুধ মিশিয়ে প্রথম কেনা দুধের দরের তিনগুণ দরে বিক্রী করে দেখলে তোমার 6 টাকা লাভ হয়েছে। প্রথম দুধ কত দরে কিনেছিলে ?

28. এক ব্যবসায়ী চালের সাথে কাঁকর এমনভাবে মেশালো যার ফলে কাঁকর ও চালের অনুপাত 1 : 30 হয়। আর এক রকম চালে এমন-ভাবে কাঁকর মেশালো যাতে কাঁকর ও চালের পরিমাণের অনুপাত দাঁড়ায় 1 : 20। প্রথম প্রকার চালের 31 কে. জির সাথে দ্বিতীয় প্রকার চালের 42 কে. জি. মেশালে মিশ্রিত চালে কাঁকর ও চালের পরিমাণের অনুপাত কত ?

দ্বিতীয় অধ্যায়
শতকরা হিসাব

§ 2·1 'শতকরা' (**percent**) কথাটির অর্থ 'শ' প্রতি বা 'প্রতি শ'তে'। কথাটির ব্যবহারিক প্রয়োগ একটি উদাহরণের সাহায্যে বোঝা যাক। ধরা যাক, 300টি ডিমের মধ্যে 21টি ডিম পচা। তাহলে বলা যায় ডিমগুলির প্রতি একশটিতে 7টি করে পচা। অর্থাৎ ডিমগুলির শতকরা 7টি পচা। শতকরা 7 বোঝাতে 7% লেখা হয়। তাহলে ডিমগুলির 7% পচা। এইভাবে যদি বলা যায়, কিছু টাকা খাটিয়ে 17% লাভ হয়েছে। তাহলে বুঝতে হবে 600 টাকা খাটান হয়ে থাকলে 102 টাকা লাভ হয়েছে, 700 টাকা খাটান হয়ে থাকলে 119 টাকা লাভ হয়েছে, ইত্যাদি।

17% লাভ কথাটি একটু ভিন্ন দৃষ্টিভঙ্গীতে দেখা যাক। কথাটিতে প্রতি 100 টাকায় 17 টাকা লাভ বোঝাচ্ছে। তাহলে টাকা প্রতি (বা প্রতি 1 টাকায়) লাভ দাঁড়াচ্ছে (ঐকিক নিয়মে) $\frac{17}{100}$ টাকা। অতএব মোট যত টাকা খাটান হয়েছে তার $\frac{17}{100}$ অংশ লাভ। তাহলে 17% ও $\frac{17}{100}$ অংশ কথা দুটি একার্থবোধক ; একই যুক্তিতে $x\%$ ও $\frac{x}{100}$ অংশ কথা দুটি একার্থবোধক। x শতাংশ কথাটিতেও একই অর্থ প্রকাশ পায়।

$$x\% \equiv \frac{x}{100} \text{ অংশ}$$

বা, বিকল্পে $$x \text{ অংশ} = 100x\%$$

ডিমগুলির কত অংশ পচা, যে টাকা খাটান হয়েছে তার কত অংশ লাভ, ইত্যাদির হিসাব প্রতি শ'তেও দেওয়া চলে। প্রতি শ'তে যে হিসাব তা'ই শতকরা হিসাব।

লক্ষণীয় যে শতকরা 5 লাভ বললে বোঝায় প্রতি 100 টাকায় 5 টাকা লাভ, বা প্রতি 100 পয়সায় 5 পয়সা লাভ, বা প্রতি 100টিতে 5টি লাভ, ইত্যাদি। সুতরাং 'শতকরা 5 টাকা লাভ' এরূপ কথা বলা ঠিক নয়। 'শতকরা 5 লাভ' বলা উচিত। তেমনি কোন শহরের লোকসংখ্যার শতকরা

5 জন মুসলমান না বলে শতকরা 5 মুসলমান বলাই ঠিক। তবে কথা বলার প্রচলিত রীতি অনুযায়ী শতকরা 5 জন মুসলমান কথাটি সুশ্রাব্য। তাই বলে 5% জন মুসলমান লেখা ঠিক নয়। 5% মুসলমান লেখা বিধেয়।

§ 2·2 উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. একটি চৌবাচ্চার $\frac{2}{5}$ অংশ জলে পূর্ণ। চৌবাচ্চাটির শতকরা কত ভাগ জলে পূর্ণ?

$\frac{2}{5}$ অংশ $=\frac{2}{5}\times 100\% = 40\%$।

[বা, বিকল্পে, $\frac{2}{5}=\frac{2}{\cancel{5}}\times\frac{\overset{20}{\cancel{100}}}{100}=\frac{40}{100}$]

অতএব চৌবাচ্চাটির শতকরা 40 ভাগ জলে পূর্ণ।

| শতকরা 40 ভাগ | উত্তর

উদাহরণ 2. *A*-র আয় *B*-র আয় অপেক্ষা 25% বেশী। *B*-র আয় *A*-র আয় অপেক্ষা শতকরা কত কম?

ধরা যাক, *B*-র আয় 100 টাকা। তাহলে *A*-র আয় প্রশ্নানুসারে 125 টাকা। অতএব

A-র আয় 125 টাকা হলে *B*-র আয় হয় 100 টাকা,

∴ " " 1 " " " " " $\frac{100}{125}$ "

∴ " " 100 " " " " " $\frac{\overset{20}{\cancel{100}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{125}}}\times\overset{4}{\cancel{100}}$

বা 80 টাকা।

∴ " " 100 " " " " " *A*-অপেক্ষা

100 − 80 বা 20 টাকা কম।

তাহলে *B*-র আয় *A*-র আয় অপেক্ষা 20% কম।

| ∴ 20% কম | উত্তর

[লক্ষণীয় যে, *A*-র আয়ের তুলনায় *B*-র আয় শতকরা কত কম বা বেশী হিসাব করতে হলে *A*-র আয়ের প্রতি 100-তে হিসাব করতে হবে।]

উদাহরণ 3. কোন একদিন কমলালেবু পাওয়া যাচ্ছিল টাকায় 10টি। পরের দিন দর হল টাকায় 8টি। প্রথম দিনের তুলনায় দ্বিতীয় দিনের বাজার দর কিরূপ বাড়ল ?

প্রথম দিনে 1টি কমলা লেবুর দাম $\frac{1}{10}$ টাকা।

দ্বিতীয় " 1টি " " " $\frac{1}{8}$ টাকা।

অতএব বৃদ্ধি $=\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{5-4}{40}=\frac{1}{40}$।

অতএব প্রথম দিন যে পরিমাণ লেবুর দাম ছিল $\frac{1}{10}$ টাকা, দ্বিতীয় দিনে সেই পরিমাণ লেবুর দাম হয় $\frac{1}{40}$ টাকা বেশী। সুতরাং প্রথম দিনের তুলনায় দ্বিতীয় দিনের বাজার দরে বৃদ্ধি

প্রতি $\frac{1}{10}$ টাকায় $\frac{1}{40}$ টাকা

বা " 1 " $\frac{1}{40}\div\frac{1}{10}$ বা $\frac{10}{40}$ টাকা

বা " 100 " $\frac{10}{40}\times 100$ বা 25 টাকা।

$\therefore$ 25% বাড়ল। উত্তর

উদাহরণ 4. যদি কাপড়ের দর 25% বাড়ে তবে কোন গৃহস্থকে কাপড় বাবদ খরচ স্থির রাখতে হলে কাপড়ের ব্যবহার কি পরিমাণ কমাতে হবে ?

ধরা যাক, আগে x টাকার খরচে y মিটার কাপড় ব্যবহার হত। আগে যে পরিমাণ কাপড়ের দাম ছিল 100 টাকা এখন তার দাম 125 টাকা।

সংক্ষেপে, পূর্বের 100 টাকার কাপড় এখন 125 টাকা।

$\therefore$ " 1 " " " $\frac{125}{100}$ "

$\therefore$ " x " " " $\frac{125}{100}x$ "

কিন্তু আগে x টাকায় y মিটার কাপড় পাওয়া যেত।

তাহলে বর্তমান $\frac{125}{100}x$ টাকায় y মিটার কাপড় পাওয়া যায়।

$\therefore$ " 1 " $\frac{y}{\frac{125}{100}x}$ বা $\frac{100y}{125x}$ মিটার কাপড় পাওয়া যায়।

$\therefore$ " x " $\frac{100y}{125x}\cdot x$ বা $\frac{100y}{125}$ " " " "

যেহেতু কাপড় বাবদ এখনও x টাকা খরচ হয় অতএব বর্তমান $\frac{100y}{125}$ মিটার

কাপড় ব্যবহার করতে হবে। সুতরাং

$y-\frac{100y}{125}=\frac{125y-100y}{125}=\frac{25y}{125}=\frac{y}{5}$ মিটার কাপড় ব্যবহার কমাতে হবে।

y মিটারে কমাতে হয় $\frac{y}{5}$ মিটার

$\therefore$ 1 " " " $\frac{y}{5}\div y$ বা $\frac{1}{5}$ মিটার,

$\therefore$ 100 " " " $\frac{1}{5}\times 100$ বা 20 মিটার।

অতএব কাপড়ের ব্যবহার 20% কমাতে হবে।

$\therefore$ 20% কমাতে হবে।	উত্তর

উদাহরণ 5. কোন স্কুলে শিক্ষকের সংখ্যা ছাত্র ও শিক্ষকের সমষ্টির 5 শতাংশ। 10 জন নতুন ছাত্র ভর্তি হওয়ায় শিক্ষকের সংখ্যা সমষ্টির $4\frac{36}{41}$ শতাংশ হল। ঐ স্কুলে শিক্ষকের সংখ্যা কত?

5 শতাংশ $=\frac{5}{100}$ অংশ।

$4\frac{36}{41}$ শতাংশ $=\frac{200}{41}$ শতাংশ $=\frac{2}{41}$ অংশ।

ধরা যাক, ছাত্র ও শিক্ষকের সমষ্টি ছিল x। শিক্ষকের সংখ্যা তাহলে $x\frac{5}{100}$।

পরে সমষ্টি হল $(x+10)$। শিক্ষকের সংখ্যা তাহলে $(x+10)\frac{2}{41}$।

অতএব

$x\cdot\frac{5}{100}=(x+10)\cdot\frac{2}{41}$, কারণ এর প্রতি পক্ষই শিক্ষকের সংখ্যা নির্দেশ করছে।

$\therefore \quad \frac{x}{20}=\frac{2(x+10)}{41}$

বা $\quad 41x=40x+400$

$\therefore \quad x=400$।

$\therefore$ শিক্ষকের সখ্যা $=x\frac{5}{100}=400\times\frac{5}{100}=20$।

$\therefore$ শিক্ষকের সংখ্যা 20।	উত্তর

উদাহরণ 6. কোন পরীক্ষায় সমস্ত পরীক্ষার্থীর 70% বাংলায় ও 85% অঙ্কে পাশ করেছে। কিন্তু উভয় বিষয়ে পাশ করেছে 60%। উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 17 জন। মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

ধরা যাক, সর্বমোট x জন পরীক্ষার্থী ছিল। তাহলে বাংলায় পাশ $\frac{70}{100}x$ জন, অঙ্কে পাশ $\frac{85}{100}x$ জন, উভয় বিষয়ে পাশ $\frac{60}{100}x$ জন।

[লক্ষণীয় যে যারা বাংলায় পাশ করেছে তাদেরই মধ্যে কিছু আছে যারা অঙ্কেও পাশ করেছে এবং কিছু আছে যারা অঙ্কে পাশ করেনি। অর্থাৎ বাংলায় পাশকরাদের মধ্যে কিছু আছে উভয় বিষয়ে পাশ এবং কিছু শুধু বাংলায় পাশ।]

বাংলায় পাশ $\frac{70x}{100}$ জনের মধ্যে $\frac{60x}{100}$ জন অঙ্কেও পাশ।

অতএব শুধু বাংলায় পাশ $\frac{70x}{100}-\frac{60x}{100}=\frac{10x}{100}$ জন।

তেমনি শুধু অঙ্কে পাশ $\frac{85x}{100}-\frac{60x}{100}=\frac{25x}{100}$ জন।

অতএব কোন না কোন বিষয়ে পাশ করেছে

$$\underset{[\text{উভয়}]}{\frac{60x}{100}} + \underset{[\text{শুধু বাংলা}]}{\frac{10x}{100}} + \underset{[\text{শুধু অঙ্ক}]}{\frac{25x}{100}} = \frac{95x}{100} \text{ জন।}$$

তাহলে উভয় বিষয়ে ফেল করেছে এরূপ পরীক্ষার্থীর সংখ্যা

$$=x-\frac{95x}{100}=\frac{100x-95x}{100}=\frac{5x}{100}\text{।}$$

∴ প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{5x}{100}=17\text{।}$$

$$\therefore \quad x=\frac{17\times100}{5}=340\text{।}$$

∴ মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা হল 340। উত্তর

§ 2·3 প্রশ্নমালা

1. এক ঝুড়ি আমের $\frac{1}{8}$ অংশ নষ্ট হয়ে গেছে বললে আমগুলির শতকরা কতভাগ নষ্ট হয়ে গেছে বুঝায়?
2. একটি ঝুড়িতে যা লিচু আছে তার শতকরা 12টি খারাপ। ঝুড়িটিতে 750টি লিচু থাকলে মোট ক'টি লিচু খারাপ?
3. 72টি ডিমের মধ্যে 8টি ডিম পচা বের হল। ডিমগুলির মধ্যে শতকরা কি হারে পচা ডিম ছিল?

4. 4 লিটার দুধের সঙ্গে 1 লিটার জল মিশান হল। ঐ জল মিশ্রিত দুধের শতকরা কতভাগ জল ?

5, একটি স্কুলের কোন পরীক্ষায় 50 জন বালক ও 30 জন বালিকা পরীক্ষা দিয়েছিল। যদি 60% বালক ও 50% বালিকা কৃতকার্য হয়ে থাকে তবে সমস্ত বালক-বালিকার শতকরা কত অংশ কৃতকার্য হয়েছিল ?

6. 1 টাকা কেজি দরে কিছু আলু কেনার জন্য আমি প্রস্তুত হয়ে এসেছিলাম। আলুর দর 20% কম হয়ে যাওয়ায় আমি ঐ পয়সায় 2 কেজি আলু বেশী পেলাম। আমি আলুর জন্য কত পয়সা এনেছিলাম ?

7. এক ভদ্রলোক কিছু চাল কিনতে এলেন। চালের দর হঠাৎ 10% বেড়ে গেছে বলে তিনি চালের জন্য যত পয়সা এনেছিলেন তা দিয়ে 1 কেজি কম চাল পেলেন। চালের বর্তমান দর কত ? (প্রতি কেজি 2·75)

8. এক পরীক্ষায় তালিকাভুক্ত সমস্ত পরীক্ষার্থীর 5% অনুপস্থিত। উপস্থিত পরীক্ষার্থীর 80% পাশ করল। তালিকাভুক্ত সমস্ত পরীক্ষার্থীর শতকরা কত পাশ করল ?

9. এক পরীক্ষায় *A*-র চেয়ে *B* শতকরা 10 নম্বর বেশী পেয়েছে। তা হলে *B*-র চেয়ে *A* শতকরা কত কম পেয়েছে ?

10. কোন একটি নির্বাচনে নির্বাচকবৃন্দের 30% ভোট দেননি। প্রদত্ত ভোটের 60% বিজয়ীপক্ষ পেয়েছেন ; প্রতিপক্ষ পেয়েছেন বাকী ভোটগুলি। বিজয়ীপক্ষ 1400 ভোটের ব্যবধানে জিতেছেন। ঐ নির্বাচনে নির্বাচকবৃন্দের সংখ্যা কত ?

11. বাজারে আলুর দর 10% বেড়ে যায়, আলুর খরচের পরিমাণ 10% কমিয়ে দিলাম। তাতে আলুর জন্য খরচ শতকরা কত কম বা বেশী হল বল।

12. যদি চিনির দর 15% বাড়ে তবে কোন গৃহস্থকে চিনি বাবদ খরচ স্থির রাখতে হলে চিনির খরচ কি পরিমাণ কমাতে হবে ?

13. আমের দর 10% বেড়ে যাওয়ায় 10 কেজি আম কিনতে টাকা 2·20 বেশী লাগল। প্রতি কেজি আমের বর্তমান দাম কত ?

14. সাহিত্য ও গণিতের এক পরীক্ষার্থীদের 75% সাহিত্যে, 85% গণিতে ও 70% উভয় বিষয়ে পাশ করেছে। যদি 18 জন উভয় বিষয়ে ফেল করে থাকে তবে উভয় বিষয়ে কতজন পাশ করেছে? (126)

15. একটি পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 30% গণিতে ও 40% ভূগোলে ফেল করেছে। উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 42%। উভয় বিষয়ে পাশ করেছে 66 জন। মোট পরীক্ষার্থী কতজন?

16. এক বিদ্যালয়ের 70% বালক ও 30% বালিকা। বিদ্যালয় থেকে 20 জন বালক ও 8 জন বালিকা চলে গেল এবং তার পরিবর্তে বিদ্যালয়ে 10 জন বালক ও 18 জন বালিকা ভর্তি হল। ফলে বিদ্যালয়ে বালক-বালিকার সংখ্যা হল যথাক্রমে 66% ও 34%। বিদ্যালয়ে বালক-বালিকার সংখ্যা কত?

17. কোন পরীক্ষায় মোট পরীক্ষার্থীর 60% বালক ও 40% বালিকা। পরীক্ষায় বালকদের 60% ও বালিকাদের 40% পাশ করল। সমস্ত পরীক্ষার্থীর শতকরা কত ভাগ পাশ করল? বালিকা অপেক্ষা বালক যদি 25 জন বেশী পাশ করে থাকে তবে কতজন বালক পরীক্ষা দিয়েছিল?

18. এক পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 30% গণিতে ও 40% ভূগোলে ফেল করল। যদি 28% উভয় বিষয়ে ফেল করে থাকে তবে শতকরা কতজন উভয় বিষয়ে পাশ করল?

19. $\frac{5}{6}$ এর পরিবর্তে $\frac{6}{5}$ লিখলে শতকরা কত বেশী লেখা হয়?

20. কোন জায়গার লোকসংখ্যার পুরুষদের দশ-শতাংশ মহিলাদের পনের-শতাংশের সমান। ঐ জায়গায় পুরুষ অপেক্ষা মহিলা 205 জন কম। ঐ জায়গার মোট লোক সংখ্যা কত? মোট লোকসংখ্যার শতকরা কত ভাগ পুরুষ?

উত্তরমালা

॥ বীজগণিত ॥

§ 1·12 প্রশ্নমালা 1

1. (i) $a+b+c$ (ii) 0 (iii) $(b-a)x+(c-b)y+(a-c)z$
(iv) $3lx-2my+4nz$ (v) $x^2+11y^2+7z^2+5yz-9xy$
2. i) $x-19y+z$ (ii) $2a^3+2b^3$ (ii) $bx+cy+az$ (iv) $lx+my+nz$
3. (i) $8x^3+27y^3$ (ii) $9a^2-16b^2-25c^2+40bc$
(iii) $x^4+2x^3+3x^2-2x+5$
4. (i) ভাগফল$=9x^2+9xy-3y^2$ ভাগশেষ$=-21xy^3+7y^4$
(ii) $x^7+2x^6+4x^5+8x^4+16x^3+32x^2+64x+128$
5. (i) $4a+4b-4c$ (ii) $8x-13y-3z$

§ 1·14 প্রশ্নমালা 2

1. (a) $x^2+10xy+25y^2$ (b) $x^4+6x^2y^2+9y^2$
(c) $x^4+y^4+3x^2y^2-2x^3y-2xy^3$ (d) $a^2x^2-2abxy+b^2y^2$
(e) $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad+2bc+2bd-2cd$
(f) $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2bcyz+2cazx-2abxy$ (g) 502681
(h) 815409 (i) 99980001 (j) 9997800121
2. (a) $32ac-48bc$ (b) $4abxy$ (c) $4acx^2+4bcx$ (d) $4a^2b^2$
(e) $4y^2z^2$ (f) $4h^6+24h^4k^2+36h^2k^4$ (g) 25 (h) ·0625
(i) 47·52 (j) 5·514 3. (i) $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$
(ii) $a^4+b^4+c^4+6b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2+4b^3c+4bc^3-4a^2bc$
(iii) $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ (iv) 999991 (v) 3999936
4. (i) $(3x-4y+5z)^2+(2x-3y+5z)^2$ (ii) $(a+b-c)^2+c^2$
(iii) $(l+m-n)^2+(l-m+n)^2$ (iv) $(2x+2y+z)^2+(2x-3y)^2$
5. 7^2+5^2 6. 17^2+7^2 7. (i) $(2h+2k)^2-(h-k)^2$
(ii) $\{\frac{1}{2}(h^2+3hk+2k^2+h+3k)\}^2-\{\frac{1}{2}(h^2+3hk+2k^2-h-3k\}^2$
(iii) 8^2-1^2 (iv) 37^2-36^2 8. (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 1
(v) 7 (vi) 6 (vii) 1 (viii) $\frac{1}{2}$ 9. 11.

§ 1·16 প্রশ্নমালা 3

1. (i) $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ (ii) $x^6-3x^4a^2+3x^2a^4-a^6$
(iii) $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$
(iv) $a^3x^3+3a^2x^2by+3axb^2y^2+b^3y^3$ (v) $x^{12}-3x^8+3x^4-1$
(vi) $125a^3+450a^2b+540ab^2+216b^3$
(vii) $8x^6-36x^4y^2+54x^2y^4-27y^6$
(viii) $l^3+m^3+n^3+3l^2m+3l^2n+3m^2n+3lm^2+3mn^2+3ln^2+6lmn$
(ix) 970299.

3. 488 4. 140 7. 216 8. 27 9. −18 10. 2 11. 76
12. 322 13. 1298 14. 1 15. (i) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
(ii) $3(x+y+z+2)(2x+2y+2z+3)+1$ (প্রশ্নে প্রদত্ত অঙ্কের উত্তর)
[অঙ্কটিতে ভুল ছাপা আছে ঠিক অঙ্কটি হ'ল
$8(x+y+z+2)^3-(2x+2y+2z+3)^3-6(x+y+z+2)(2x+2y+2z+3)$
এবং অঙ্কটির উত্তর হবে '1'.]
(iii) $8a^3x^3$ (iv) 1000 (v) 15·625 (vi) $8a^3$ (vii) 27 (viii) $8b^3$
(ix) x^6-1 (x) 0 (zero) (xi) 16 (xii) $8b^3$ (xiii) 125
(xiv) m^6-n^6

§ 1·18 প্রশ্নমাল 4

1. $ab(2a+3b)$ 2. $(al-bm)(ax-by)$ 3. $(x-2)(x-3)$
4. $(x+1)(x-6)$ 5. $(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)$
6. $(x-1)(x+1)(x^2+4)$ 7. $(x+a+2)(x-a-3)$
8. $(x+y+5)(x+y-12)$ 9. $xy(ax-2by)^2$ 10. $5(3x+4y)^2$
11. $2(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$ 12. $3(x-2)(x+2)(x^2+4)$
13. $(x+4z)(x+6y-4z)$ 14. $(x^2-xy+4y^2)(x^2+xy+4y^2)$
15. $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)$
16. $(a^2-ab-4b^2)(a^2+ab-4b^2)$ 17. $(a^2-3ab-4b^2)(a^2+3ab-4b^2)$
18. $5a^2x^3(x+3)(x^2-3x+9)$ 19. $3a(3a^2-5)(9a^4+15a^2+25)$
20. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$ 21. $(x+y+2)(x^2-xy+y^2+x+y+1)$
[সংকেত, প্রদত্ত রাশি $=(x+1)^3+(y+1)^3$]
22. $(x+y)(x^2-xy+y^2+3x-3y+3)$
23. $(2x-3y-5z)(4x^2+9y^2+25z^2+6xy-15yz+10zx)$
24. $(x+1)(x+3)(x^2-x+1)(x^2-3x+9)$
25. $(x^2+3x+4)(x^4-3x^3+5x^2-12x+16)$
[সংকেত, প্রদত্ত রাশি $=(x^2)^3+(3x)^3+(4)^3-3.x^2.3x.4$]

26. $(x^2+3)(x^4-3x^2+9)$ 27. $(x^2+6x+2)(x^2+6x+11)$
28. $(x+2)(x-3)(x^2-x-8)$ 29. $(3x^2-y^2)(2x^2+5y^2)$
30. $(x-9)(7x+1)$ 31. $(2x+3y-5z)(3x-4y+2z)$
32. $(6x+3y-5)(9x-4y+2)$ 33. $(x+1)(x+2)(x-2)(x^2+1)$
34. $(x+2)(x+5)(x^2+x+1$ 35. $(x+1)(2x+1)(2x+3)$
36. $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 37. $(b+c)(c+a)(a+b)$
38. $(x-y+z)(zx-xy-yz)$ 39. $(x+y+z)(yz+zx+xy)$
40. $(x+y)(y+z)(z+x)$ 41. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$
42. $-(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$
43. $3(b+c)(c+a)(a+b)$ 44. $-(b-c)(c-a)(a-b)$
45. $(b-c)(c-a)(a-b)$ 46. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$

§ 1·23 প্রশ্নমালা 5

1. গ.সা.গু. $=3x-2$ এবং ল.সা.গু. $=(3x-2)(x+4)(x+2)^2$
2. গ.সা.গু. $=3x(x-1)$; ল.সা.গু. $=9x^3(x-1)(x+4)(2x-3)(3x+5)$
3. গ.সা.গু. $=3x(2x-1)$;
ল.সা.গু. $=18x^3(2x-1)(x+2)(4x-3)(6x+5)$
4. গ.সা.গু. $=3x+2$;
ল.সা.গু. $=(9x^2-12x+8)(162x^4-135x^3+102x-4)$
5. গ.সা.গু. $=x+1$;
ল.সা.গু. $=(x+1)(x^2+x-1)(x^2-x+2)(x^2-x+4)$
6. গ.সা.গু. $=8x^2+6x+3$; ল.সা.গু. $=2(x+1)(2x+1)(8x^2+6x+3)$
7. গ.সা.গু. $=2(x+1)(x+2)$;
ল.সা.গু. $=4(x+1)(x+2)(x-3)(3x+2)$

§ 1·26 প্রশ্নমালা 6

1. $\frac{2a}{x^2-a^2}$ 2. $\frac{2x^2+x+22}{(x^2-5x+6)(x^2+6x+16)}$ 3. $\frac{2(x+y)}{x^2+xy+y^2}$
4. $\frac{2}{(x+1)(x+3)(x+7)}$ 5. $\frac{x+4}{x+2}$ 6. $-\frac{1}{ab}$ 7. 1 8. $\frac{32}{x^{32}-1}$
9. 1 10. 0

§ 2·2 প্রশ্নমালা 7

1. (*i*) $3x+x=60$ (x পুত্রের বয়স বোঝায়)
(*ii*) $3n+(3n+3)+(3n+6)=36$
($3n$ ছোট সংখ্যাটি বোঝায় আর n একটি পূর্ণরাশি)

(*iii*) $4x=44$ (x বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য বোঝায়)

(*iv*) $2x+2(x+4)=56$ (x ক্ষুদ্রতর বাহুর দৈর্ঘ্য বোঝায়)

2. (*i*) (*a*) তিনটি পর পর স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 39.

($x=$ ছোট সংখ্যা)

(*b*) রামের কাছে শ্যামের থেকে 1 টাকা বেশী আর যত্থর থেকে 1 টাকা কম আছে এবং সকলের মোট 39 টাকা আছে। ($x=$শ্যামের টাকা)

(*c*) তিন ভাইয়ের মধ্যে বড় ত্বজনের যে কোন একজন তার অব্যবহিত পরের ভাইয়ের থেকে 1 বৎসরের বড় আর তাদের বয়সের সমষ্টি 39 বৎসর। ($x=$কনিষ্ঠ ভাইয়ের বয়স)

(*ii*) (*a*) পুত্রের বয়স পিতার বয়সের এক তৃতীয়াংশের থেকে 1 বৎসর বেশী এবং উভয়ের বয়সের সমষ্টি 64 বৎসর। ($3x=$পিতার বয়স)

(*b*) একটি সংখ্যার পরের সংখ্যা এবং তার তিনগুণের যোগফল 64. (সংখ্যাটি$=x$)

(*c*) একটি ঝুড়িতে আমের সংখ্যা লেবুর থেকে 1 বেশী। একটি আমের দাম 1 টাকা ও 1টি লেবুর দাম 3 টাকা ও ঐ ফলগুলির মোট দাম 64 টাকা। ($x=$লেবুর দাম)

(*iii*) (*a*) একটি ছাগলের দাম একটি ভেড়ার দামের থেকে 5 টাকা বেশী আর তাদের মোট দাম 69 টাকা। ($x=$ভেড়ার দাম)

(*b*) রামের কাছে যত্থর চেয়ে ত্বটি আম বেশী আছে ও ত্ব'জনের মোট 69টি আম আছে। ($x=$যত্থর আমের সংখ্যা)

(*c*) কালু তার দাদার চেয়ে 5 বৎসরের ছোট আর ত্বজনের মোট বয়স 69 বৎসর। ($x=$কালুর বয়স)

§ 2·4 প্রশ্নমালা 7(A)

[প্রশ্নমালা 8-এর স্থলে প্রশ্নমালা 7(A) পড়তে হ'বে]

1. 27 ; 2. 1 ; 3. $a+b+c+abc$; 4. $-a$; 5. 6 ; 6. 3 ; 7. $-2\frac{1}{2}$; 8. $\frac{a+b}{2}$; 9. $a+b+c$; 10. 1.

§ 2·5 প্রশ্নমালা 8

1. 15 ; 2. 14,35 ; 3. 28 ; 4. 55 ; 5. 15,10 ; 6. 27,28,29 ; 7. 33,35,37 ; 8. এই শর্তাধীন কোনও জোড় সংখ্যা নেই ; 9. 95 ; 10. 93 ; 11. 258 ; 12. $\frac{2}{5}$; 13. $\frac{5}{11}$; 14. $\frac{7}{15}$; 15. $\frac{3}{5}$; 16. $\frac{3}{8}$; 17. $\frac{1}{14}$; 18. রাম 110 টাকা, শ্যাম 165 টাকা, যদু 225 টাকা পায়।

19. A-র কাছে $3b+2a$ টাকা এবং B-এর কাছে $3b+a$ টাকা আছে।

20. বালক 150 জন ; বালিকা 50 জন। 21. 11টি 5 পয়সা ও 15টি 3 পয়সা।

22. পিতার বয়স 61 বৎসর ; পুত্রের বয়স 38 বৎসর। 23. 3 বৎসর।

24. 32 বৎসর। 25. অমলের বয়স 20 বৎসর, সুবলের বয়স 40 বৎসর।

26. রহিমের বয়স 60 বৎসর করিমের বয়স 45 বৎসর।

27. উভয়ের রওনা হওয়ার $\frac{d}{u+v}$ ঘন্টা পরে A হ'তে $\frac{ud}{u+v}$ কি.মি. দূরে ট্রেন দু'টি পরস্পর মিলিত হ'বে।

28. উভয়ের রওনা হওয়ায় $\frac{d}{u-v}$ ঘন্টা পরে A হ'তে $\frac{ud}{u-v}$ কি.মি. দূরে ট্রেন দু'টি পরস্পর মিলিত হ'বে। 29. ট্রেনে 360 কি.মি., বাসে 40 কি.মি.।

30. 240 লাফ। 31. 9 মিনিট। 32. ট্রেনের গতিবেগ ঘন্টায় 80 কি.মি. এবং স্টেশন দু'টির মধ্যে দূরত্ব 240 কি.মি.।

33. সামনের চাকা 3000 পাক ও পিছনের চাকা 2000 পাক ঘোরে এবং গাড়ীতে 9 কিলোমিটার পথ যায়। 34. (1) 18 সেকেণ্ড (2) 48 সেকেণ্ড (3) 1 মিনিট 18 সেকেণ্ড (4) $33\frac{3}{4}$ সেকেণ্ড। 35. ঘন্টায় $2\frac{1}{2}$ কিলোমিটার।

36. ঘন্টায় 6 কিলোমিটার। 37. 25 মিটার।

38. দৈর্ঘ্য 60 মিটার, প্রস্থ 20 মিটার, ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার।

39. 700 বর্গমিটার। 40. $4780\frac{3}{7}$ বর্গমিটার।

41. 27,000 টাকা ; 18,000 টাকা। 42. 1600 টাকা $7\frac{1}{2}\%$ হারে এবং 1500 টাকা 12% হারে খাটান হয়েছিল। 43. 400 টাকা।

44. দুধ 60%, জল 40%। 45. 200 টাকা।

46. পুরুষ 28,125 জন, স্ত্রীলোক 21,875 জন (প্রশ্নে 50,0001 এর জায়গায় 50,000 পড়তে হবে)। 47. খারাপ চা $83\frac{1}{3}\%$ ভাল চা $16\frac{2}{3}\%$। 48. 50 লিটার। 49. 400 টাকা।

50. A 450 টাকা, B 300 টাকা এবং C 400 টাকা পায় (প্রশ্নে 1100 স্থলে 1150 পড়তে হবে)। 51. 32 দিন। 52. A 4 দিন ও B 9 দিন কাজ করেছিল। 53. 9 দিন। 54. 6 দিন। 55. 30 দিনে। 56. 24 ঘন্টায়। 57. 3 ঘ. 24 মি.। 58. 18 ঘন্টায়। 59. জল বের হয় ; 30 ঘন্টা লাগে। (প্রশ্নের দ্বিতীয় লাইনটি এভাবে পড় 'পূর্ণ হয়। শুধু A নলটি খোলা থাকলে 10 ঘন্টায় পূর্ণ হয়। B নল দিয়ে জল ঢোকে না') 60. জল ঢোকে ; 100 ঘন্টা লাগে। 61. 45 জন। 62. 1260 জন। 63. 1500 জন। (প্রশ্নে 129 এর জায়গায় 48 পড়তে হবে) 64. 2টা $10\frac{10}{11}$ মিনিটে। 65. 1টা $38\frac{2}{11}$ মিনিটে। 66. 8টা $10\frac{10}{11}$ মিনিটে ও 8টা $43\frac{7}{11}$ মিনিটে। 67. 11টা $10\frac{10}{11}$ মিনিটে ও 11টা $43\frac{7}{11}$ মিনিটে। 68. 3টা $32\frac{8}{11}$ মিনিট। 69. 5টা $16\frac{4}{11}$ মিনিটে ও 5টা $38\frac{2}{11}$ মিনিটে। 70. 7টা $23\frac{2}{11}$ মিনিটে।

§ 3·4 প্রশ্নমালা 9

1. $x=17, y=12$ 2. $x=-2, y=15$ 3. $x=1, y=1$ 4. $x=0, y=2$ 5. $x=3, y=1$ 6. $x=1, y=-1$ 7. $x=\frac{12}{7}, y=\frac{113}{35}$ 8. $x=7, y=9$ 9. $x=3, y=2$ 10. $x=2, y=4$ 11. $x=a, y=b$ 12. $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}$ 13. $x=2, y=1$ 14. $x=5, y=4$ 15. $x=2, y=2$ 16. $x=\frac{2}{3}, y=\frac{5}{7}$ 17. $x=\frac{1}{7}, y=\frac{1}{3}$ 18. $x=-\frac{1}{12}, y=-\frac{1}{10}$ 19. $x=\frac{1}{6}, y=-2$ 20. $x=1, y=1$ 21. $x=6, y=4$ 22. $x=6, y=-4$ 23. $x=-10, y=-13, z=-4$ 24. $x=-2, y=-2, z=-2$ 25. $x=16, y=9, z=20$ 26. $x=65, y=54, z=61$ 27. $x=-\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$ 28. $x=-\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{3}, z=-\frac{1}{2}$, 29. $x=\frac{1}{2}, y=1, z=4$ 30. $x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}, z=\frac{5}{2}$ 31. অসমঞ্জস 32. অভেদ 33. সমঞ্জস 34. সমঞ্জস 35. অসমঞ্জস 36. পরস্পর নির্ভরশীল 37. অসমঞ্জস 38. সমঞ্জস।

§ 3·6 প্রশ্নমালা 10

1. 39 2. 45 3. 892 4. 48 5. 37 6. 149 ও 46 7. 675, 27 8. 450, 30 9. $\frac{3}{5}$ 10. $\frac{5}{7}$ 11. রামের 430 টাকা,

শ্যামের 320 টাকা ও যদুর 215 টাকা আছে। 12. A 300 টাকা, B 500 টাকা ও C 400 টাকা পাবে। 13. A 200 টাকা, B 100 টাকা ও C 300 টাকা পাবে। 14. পিতার বয়স 45 বৎসর, পুত্রের বয়স 20 বৎসর। 15. পিতার বয়স 47 বৎসর, পুত্রের বয়স 23 বৎসর। 16. A এর বয়স 86 বৎসর আর B এর বয়স 72 বৎসর। 17. বর্তমানে পিতার বয়স 52 বৎসর ও পুত্রদুটির বয়স যথাক্রমে 30 বৎসর ও 25 বৎসর। 18. পিতা ও পুত্রদের বয়স যথাক্রমে 63 বৎসর, 38 বৎসর ও 35 বৎসর। 19. পিতা ও পুত্রের বয়স যথাক্রমে 63 বৎসর ও 33 বৎসর। 20. 45 21. 3 পয়সা 15টি ও 5 পয়সা 11টি। 22. খরগোশ 1150টি, মোরগ 850টি। 23. 50°, 70°, 60°. 24. 18 কিলোমিটার, ঘন্টায় 4 কিলোমিটার। 25. 15 কি. মি. ঘন্টায় 5 কি. মি. 26. অমল ঘন্টায় 12 কি. মি. আর বিমল ঘন্টায় 10 কি.মি. দৌড়ে। 27. ঘন্টায় 40 কি.মি. ও ঘন্টায় 30 কি.মি. 28. 100 কি. মি. বেলা 9টা 45 মিনিটে। 29. ট্রেনটি ঘন্টায় 44 কি. মি. বেগে ও দ্বিতীয় লোকটি ঘন্টায় 4 কি.মি. বেগে যাচ্ছে। 30. 40 মিটার ও 30 মিটার। 31. ঘন্টায় 6 ও 4 কি.মি. 32. ঘন্টায় 2 কি.মি. ও 4 কি.মি.। 33. 20 মিটার ও 15 মিটার। 34. $\frac{111}{8}$ মি. ও $\frac{37}{8}$ মি. 35. প্রথমটি 360 টাকা অপরটি 460 টাকা। 36. 12,870 টাকা। 37. গাড়ীর মূল্য 750 টাকা, ঘোড়ার মূল্য 500 টাকা। 38. কম দামী আম 40টি ও বেশী দামী আম 36টি। 39. 2 কুইন্টাল ও 3 কুইন্টাল। 40. ট্রেনের বেগ ঘন্টায় 60 কি.মি. ও বাসের বেগ ঘন্টায় 50 কি.মি.। 41. মোট জমি 1050 হেক্টর ও দিনে 50 হেক্টর করে জমি চাষ হয়। 42. 280টি। 43. 14 জন শ্রমিক। 44. 16 দিনে। 45. A 15 ঘন্টায়, B 10 ঘন্টায়, C 30 ঘন্টায় কাজটি শেষ করে। 46. $22\frac{3}{11}$ দিনে। 47. $5\frac{7}{13}$ দিনে। 48. তৃতীয় চৌবাচ্চাটি 16 ঘন্টায় জলপূর্ণ চৌবাচ্চা জলশূন্য করতে পারে। 49. A ও B নল দিয়ে খালি চৌবাচ্চা যথাক্রমে 4 ও 5 ঘন্টায় পূর্ণ হয় আর C নল দিয়ে ভর্তি চৌবাচ্চা 6 ঘন্টায় খালি হয়।

50. (*i*) 5 টা $47\frac{59}{143}$ মিনিট, 9 টা $28\frac{136}{143}$ মিনিট ;
(*ii*) 7 টা $53\frac{41}{143}$ মিনিট, 10 টা $39\frac{63}{143}$ মিনিট ;
(*iii*) 1 টা $9\frac{93}{143}$ মিনিট, 11 টা $55\frac{115}{143}$ মিনিট ;

51. 350 টাকা, 150 টাকা। 52. 300 টাকা, 522 টাকা

53. (*i*) 96টি (*ii*) 54 দিনে। 54. 25 কিগ্রা ; 175 কেজি, 125 কেজি। 55. 6,000 টাকা। 56. 7,000 টাকা। 57. 3,600 টাকা। 58. 96·80 টাকা।

§ 4·4 প্রশ্নমালা 11

[প্রশ্নমালা 10 জায়গায় 11 পড়তে হবে।]

4. (*i*) 1, 1 (*ii*) 6, 1 (*iii*) 1, 1 (*iv*) 9, −3 (*v*) 0, 0 (*vi*) 2, 0 (*vii*) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ (*viii*) 5, 1 (*ix*) 0, 0 (*x*) 3, 3

5. $-\frac{7}{3}$, 1 ; 6. 90° ; 8. 5 ; 10. 1 টাকা 80 পয়সা, 12টি লেবু ; 11. পুলিশ $\frac{1}{2}$ ঘন্টা পর মোট $2\frac{1}{2}$ কি.মি. দৌড়ে গিয়ে চোরকে ধরবে।

॥ পাটীগণিত ॥

§ 1·7 প্রশ্নমালা 1

1. 5 2. 1 : 9 3. 5 : 6 4. 10 : 7 5. 20 6. 1 : 1 7. (*i*) 5 : 23, 6 : 14, 4 : 7 (*ii*) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{5}$ 8. 121 : 675 9. ধীরু 198 টাকা ও বীরু 126 টাকা 10. 5 : 6 11. রাম 20 টাকা, শ্যাম 40 টাকা ও যদু 60 টাকা 12. 4 : 3 13. 4 কিগ্রা 14. 7 : 6 15. 5 : 3 16. জল 16 কিগ্রা, দুধ 60 কিগ্রা 17. 5 : 7 18. 4 : 5 19. বীরু 20 বৎসর হারু 40 বৎসর 20. দেবু 12 বৎসর, শিবু 24 বৎসর ও মাণিক 48 বৎসর 21. কেষ্ট 40 টাকা, মদন 60 টাকা 22. 50 23. 24 24. $\frac{2}{3}$ 25. $\frac{1}{2}$ 26. 9 : 19 27. 1 টাকা সের দরে। 28. 3 : 70।

§ 2·3 প্রশ্নমালা 2

1. 20% ; 2. 90 ; 3. $11\frac{1}{9}$; 4. 20% ; 5. $56\frac{1}{4}$; 6. 8 টাকা 7. প্রতি কেজি 2·75 টাকা ; 8. 76% ; 9. $9\frac{1}{11}$; 10. 10,000 ; 11. 1% কম ; 12. $13\frac{1}{23}$% ; 13. টাকা 2/42 ; 14. 126 ; 15. 150 ; 16. 250 ; 17. 52%, 75 ; 18. 56% ; 19. 44% ; 20. 1025, 60%।

জ্যামিতি

(নবম শ্রেণীর জন্য)

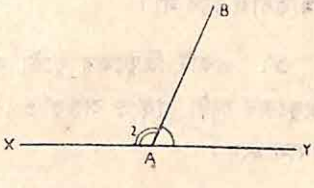
সূচনা

পূর্বপাঠের সারসংক্ষেপ ।

§ **0·1** কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ ।

বিভিন্ন ক্রিয়া কলাপ থেকে দেখা গেছে যে নিচের তত্ত্বগুলো সত্য। এগুলোকে স্বতঃসিদ্ধরূপে ধরে নেওয়া হচ্ছে।

1°. একটি সরলরেখা আর একটি সরলরেখার উপর দাঁড়িয়ে যে দুটো সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করে তাদের সমষ্টি দু সমকোণ।



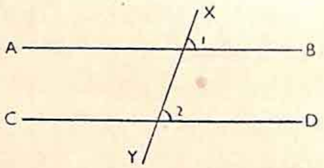
XY সরলরেখার উপর AB সরল-রেখা দাঁড়িয়ে $\angle 1$ ও $\angle 2$ দুটি কোণ উৎপন্ন করলে $\angle 1+\angle 2=2$ সমকোণ।

2°. কোন সরলরেখার কোন বিন্দুতে অপর দুটি সরলরেখা দুদিক থেকে এসে মিলিত হয়ে ওর সঙ্গে যে দুটো সন্নিহিত কোণ তৈরি করে তাদের সমষ্টি দু সমকোণ হলে যে দুটো সরলরেখা এসে মিলিত হয়েছে তারা একরেখীয় হবে।

AB সরলরেখার A বিন্দুতে AX ও AY রেখা দুটো AB-র সঙ্গে মিলিত হয়েছে [উপরের ছবি দেখ]। যদি $\angle 1+\angle 2=2$ সমকোণ হয় তবে AX ও AY এক সরলরেখায় হবে। প্রতীকগুলোর ব্যাখ্যা ছবিতেই আছে।

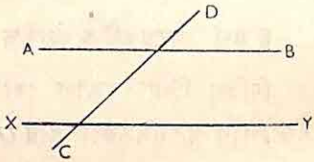
3°. দুটি সরলরেখার কোন সাধারণ ভেদক (transversal) তাদের সঙ্গে যে কোণগুলো উৎপন্ন করে তাদের মধ্যে একজোড়া অনুরূপ কোণ (corresponding angles) সমান হলে সরলরেখা দুটি অবশ্যই সমান্তরাল।

AB ও *CD* দুটি রেখাকে *XY* রেখা ছেদ করেছে। এখন যদি ছবিতে প্রদর্শিত $\angle 1$= অনুরূপ $\angle 2$ হয়, তবে $AB \parallel CD$ হবে।



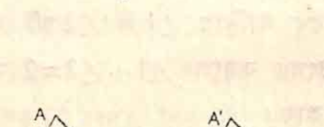
4°. দুটি ছেদী সরলরেখার উভয়েই তৃতীয় কোন সরলরেখার সমান্তরাল হতে পারে না।

AB ও *CD* যদি দুটি ছেদী সরলরেখা হয় তবে তারা উভয়েই তৃতীয় কোন সরলরেখা *XY*-র সমান্তরাল হতে পারবে না। অর্থাৎ তাদের মধ্যে বড়জোর একটি সরলরেখা *XY*-র সমান্তরাল হতে পারে—দুটি নয়। তাদের মধ্যে *AB* যদি *XY*-র সমান্তরাল হয় তবে *CD*, *XY*-র সমান্তরাল হবে না।



5°. একটি ত্রিভুজের দুটো বাহু ও অন্তর্ভূ'ত কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুটো বাহু ও অন্তর্ভূ'ত কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুটো সর্বতোভাবে সমান হবে।

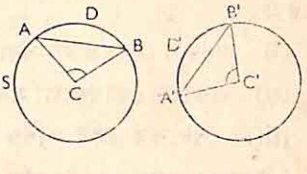
অর্থাৎ *ABC* ও *A'B'C'* ত্রিভুজ দুটোর $b=b'$, $c=c'$ ও $\angle A=\angle A'$ হলে, ত্রিভুজ দুটো সর্বতোভাবে সমান। প্রতীকগুলোর ব্যাখ্যা ছবিতেই আছে।



6°. কোন ত্রিভুজের যে কোন দুটো কোণ ও একটি বাহু অপর এক ত্রিভুজের দুটো কোণ ও একটি বাহুর সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বতোভাবে সমান।

7°. সমান সমান বৃত্তে (বা একই বৃত্তে) সমান সমান জ্যা (chord) সমান সমান চাপ (arc) ছিন্ন করে এবং সমান সমান জ্যাগুলি কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

S ও S' দুটি সমান সমান বৃত্তের দুটি সমান সমান জ্যা AB ও $A'B'$ হলে চাপ ADB ও চাপ $A'D'B'$ [ছবি দেখ] সমান হবে এবং $\angle C = \angle C'$ হবে। একই বৃত্তের ক্ষেত্রেও অনুরূপ ফল পাওয়া যাবে।



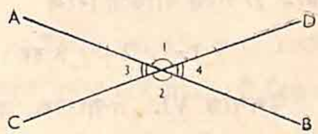
8°. [7° এর বিপরীত] দুটি সমান সমান বৃত্তের (বা একই বৃত্তের) সমান সমান চাপ ছিন্নকারী জ্যাগুলি সমান এবং কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন-কারী জ্যাগুলিও সমান।

[আগের ছবি] এখানে বলা হচ্ছে যে সমান সমান বৃত্ত দুটিতে চাপ ADB = চাপ $A'D'B'$ হলে জ্যা AB = জ্যা $A'B'$ হবে। আবার $\angle C = \angle C'$ হলেও জ্যা AB = জ্যা $A'B'$ হবে।

§ 0·2 কয়েকটি উপপাদ্য।

উপপাদ্য I. দুটো সরলরেখা ছেদ করলে উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো সমান হয়।

অর্থাৎ AB ও CD দুটো সরল-রেখা ছেদ করলে তাদের দ্বারা উৎপন্ন কোণগুলোর মধ্যে নিম্নরূপ সম্পর্ক থাকবে :



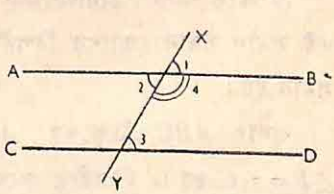
$\angle 1$ = বিপ্রতীপ $\angle 2$ ও $\angle 3$ = বিপ্রতীপ $\angle 4$।

উপপাদ্য II. কোন ভেদক দুটো সরলরেখাকে ছেদ করলে,

(1) উৎপন্ন এক জোড়া একান্তর কোণ (alternate angles (যদি সমান হয়, কিংবা

(2) ভেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুটোর সমষ্টি দু' সমকোণ হয়, তবে সরলরেখা দুটো সমান্তরাল হয়।

ধরা যাক AB ও CD সরলরেখা দুটির XY একটি ভেদক। উপপাদ্যে বলা হচ্ছে যে, (1) $\angle 2$ = একান্তর $\angle 3$ হলে $AB \parallel CD$ হয়, কিংবা (2) $\angle 3 + \angle 4 = 2$ সমকোণ হলেও $AB \parallel CD$ হয়।



উপপাদ্য III. যদি কোন ভেদক দুটো সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে তবে,

(i) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়,

(ii) একান্তর কোণগুলো সমান হয়, এবং

(iii) ভেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুটোর সমষ্টি দু' সমকোণ হয়।

[উপরের ছবি দেখ] যদি দেওয়া থাকে যে $AB \parallel CD$ এবং XY তাদের ভেদক তবে

(i) $\angle 1 =$ অনুরূপ $\angle 3$ হয়,

(ii) $\angle 2 =$ একান্তর $\angle 3$ হয়, এবং

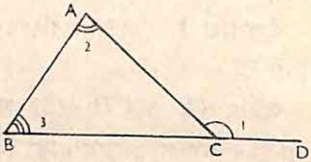
(iii) $\angle 3 + \angle 4 = 2$ সমকোণ।

উপপাদ্য IV. কোন ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দু' সমকোণ।

উপপাদ্য V. ত্রিভুজের কোন এক বাহুকে বাড়িয়ে দিলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা দূরবর্তী অন্তঃস্থ কোণ দুটোর সমষ্টির সমান।

ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে C-র দিকে D পর্যন্ত বাড়িয়ে দিলে

$\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$ হয়।



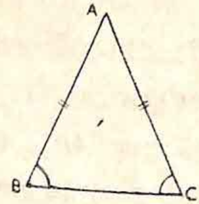
উপপাদ্য VI. n-সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট কোন বহুভুজের অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি $(2n-4)$ সমকোণ।

[$n=2$ হলে এবং $n=3$ হলে এই উপপাদ্যটির বয়ান কি হবে তা ছাত্র-ছাত্রীরা লেখার চেষ্টা করবে।]

উপপাদ্য VII. কোন ত্রিভুজের দুটি বাহু পরস্পর সমান হলে এই সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলোও সমান হয়। (সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণগুলি সমান।)

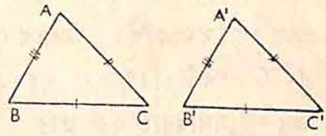
বিপরীত পক্ষে (conversely), কোন ত্রিভুজের দুটো কোণ সমান হলে এই সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুগুলোও সমান হয়।

অর্থাৎ ABC ত্রিভুজের $AB=AC$ হলে $\angle B=\angle C$ হয়। বিপরীত পক্ষে, $\angle B=\angle C$ হলে $AB=AC$ হয়।



উপপাদ্য VIII. দুটি ত্রিভুজের একটির তিনটি বাহু যথাক্রমে অপরটির তিনটি বাহুর সমান হলে ত্রিভুজ দুটো সর্বসম হয়।

ABC ও $A'B'C'$ ত্রিভুজ দুটোর $BC=B'C'$, $CA=C'A'$ ও $AB=A'B'$ হলে ত্রিভুজ দুটো সর্বতোভাবে সমান অর্থাৎ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$।



উপপাদ্য IX. কোন ত্রিভুজের দুটো বাহু অসমান হলে বড় বাহুর সামনের কোণ বড় ও ছোট বাহুর সামনের কোণ ছোট হয়।

বিপরীত ক্রমে, কোন ত্রিভুজের দুটো কোণ অসমান হলে বড় কোণের সামনের বাহু বড় ও ছোট কোণের সামনের বাহু ছোট হয়।

উপপাদ্য X. ত্রিভুজের যে কোন দুটো বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর চেয়ে বড় হয়।

উপপাদ্য XI. কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে সরলরেখা পর্যন্ত যত সরলরেখা টানা যায় তার মধ্যে লম্বই সবচেয়ে ছোট।

একটি অতিরিক্ত উপপাদ্য।

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর সমান হলে সমকোণী ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

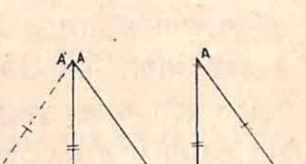
প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক ABC ও $A'B'C'$ যে কোন দুটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং এদের

$\angle B = \angle B' = 1$ সমকোণ,

অতিভুজ $AC=$ অতিভুজ $A'C'$

এবং $AB=A'B'$।



প্রমাণ করতে হবে যে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

দ্বিতীয় ধাপ।

$A'B'C'$ ত্রিভুজটিকে তুলে এনে ABC ত্রিভুজের পাশে এমনভাবে ফেলা যাক যে B' বিন্দু B বিন্দুতে $B'A'$, BA-বরাবর পড়ে। যেহেতু $BA=B'A'$,

অতএব A' বিন্দু A বিন্দুর উপর পড়বে। $A'B'C'$ ত্রিভুজটিকে এমন ভাবে ফেলা যাক যেন BA-র যে পার্শ্বে C আছে তার বিপরীত পার্শ্বে C' পড়ে। তাহলে $\angle ABC$ ও $\angle ABC'$ কোণ দুটি সন্নিহিত কোণ হয় এবং এরা প্রত্যেকে সমকোণ। অতএব $C'B$ ও CB একই সরলরেখায় হবে। তাহলে $AC'C$ একটি ত্রিভুজ। এর $AC'(=A'C')$ ও AC সমান। অতএব ঐ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু এবং তার

$$\angle C' = \angle C।$$

অতএব ABC ও ABC' ত্রিভুজ দুটোতে

AB সাধারণ,

$\angle C' = \angle C$

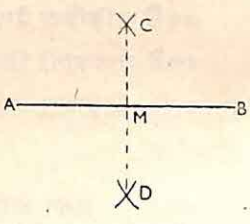
এবং $\angle ABC' = \angle ABC$।

অতএব ত্রিভুজ দুটো সর্বসম। সুতরাং ABC ও $A'B'C'$ ত্রিভুজ দুটো সর্বসম।

§ 0·3 গুরুত্বপূর্ণ কয়েকটি অঙ্কন।

সম্পাদ্য I. কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করা।

ধরা যাক AB একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা। একে সমান দুভাগে ভাগ করতে হবে।

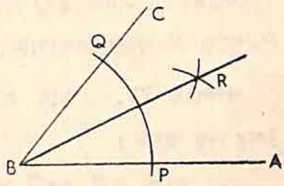


অঙ্কন। A-কে কেন্দ্র করে আন্দাজ মত AB দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের বেশী ব্যাসার্ধ নিয়ে AB রেখার দুপাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁক। পেন্সিল-কম্পাসের সাহায্যে এটা করতে হবে। আবার B-কে কেন্দ্র করে ঐ একই ব্যাসার্ধ নিয়ে AB রেখার দুপাশে দুটো বৃত্তচাপ আঁক। এই বৃত্তচাপ দুটো আগের বৃত্তচাপ দুটোকে যে বিন্দু দুটোতে ছেদ করল ধরা যাক ওগুলো C ও D। এখন স্কেল বসিয়ে C ও D একটি সরলরেখা দিয়ে যুক্ত কর। এই সরলরেখা AB-কে যে বিন্দুতে ছেদ করল তা ধরা যাক M। তাহলে AB, M বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হল।

মন্তব্য ঃ C ও D একটি সরলরেখা দিয়ে যুক্ত না করে শুধু এই সরল রেখা টানলে AB কে যেখানে ছেদ করত সেই বিন্দুতে M দাগ দিয়ে নিলেই চলে। কারণ আমাদের উদ্দেশ্য CD টানা নয়, M বিন্দুর অবস্থানটি ঠিক করা।

সম্পাদ্য II. একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করা।

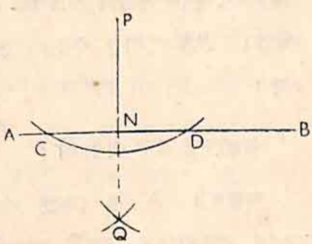
ধরা যাক $\angle ABC$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। একে সমান দুভাগে ভাগ করতে হবে।



অঙ্কন। B কে কেন্দ্র করে যে কোন ব্যাসার্ধ নিয়ে পেন্সিল-কম্পাসের সাহায্যে একটি বৃত্তচাপ আঁক। এই বৃত্তচাপটি BA ও BC কে যে দুটো বিন্দুতে ছেদ করল, ধরা যাক তারা যথাক্রমে P ও Q। এখন P ও Q কে কেন্দ্র করে আন্দাজ মত PQ দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের বেশী ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তচাপ টান। ধরা যাক ওরা R বিন্দুতে ছেদ করে। এখন B ও R যোগ কর। তাহলে BR সরলরেখাই $\angle ABC$ কে সমান দু ভাগে ভাগ করবে।

সম্পাদ্য III. কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কন।

ধরা যাক AB একটি সরলরেখা এবং তার বাইরে P একটি বিন্দু দেওয়া আছে। P থেকে AB-র উপর লম্ব আঁকতে হবে।



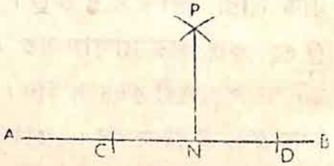
অঙ্কন। P কে কেন্দ্র করে পেন্সিল-কম্পাসের সাহায্যে আন্দাজ মত একটু বেশী ব্যাসার্ধ নিয়ে এমন একটি বৃত্তচাপ টান যেন তা AB কে দুটো বিন্দুতে ছেদ করে। [এই ব্যাসার্ধ AB থেকে P-র দূরত্বের চেয়ে কিছু বেশী (আন্দাজ মত) নিতে হবে।] এই বিন্দু দুটো ধরা যাক C ও D। এখন C ও D কে কেন্দ্র করে আন্দাজ মত CD দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের চেয়ে কিছু বেশী ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তচাপ টান। এই বৃত্তচাপ দুটো AB-র যে পাশে P আছে তার উল্টো পাশে আঁকতে হবে। [একই পাশে আঁকলেও চলে; তখন কিন্তু দেখতে হবে চাপ দুটো যেন P-তে না ছেদ করে।] এই চাপ দুটো ধরা যাক Q বিন্দুতে ছেদ করল। এখন P, Q

যোগ কর। ধরা যাক PQ, AB কে N বিন্দুতে ছেদ করল। তাহলে PN-ই হল AB-র উপর উদ্দিষ্ট লম্ব।

মন্তব্য ঃ সমস্ত PQ সরলরেখাটি না টেনে স্কেল বসিয়ে ঐ রেখা বরাবর P থেকে N পর্যন্ত টানলেই চলবে।

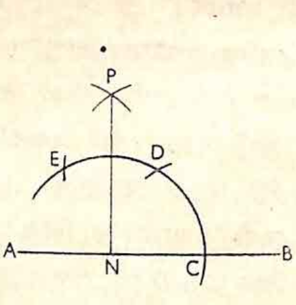
সম্পাদ্য IV. কোন সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ঐ সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কন।

ধরা যাক AB একটি সরলরেখা এবং N তার উপর একটি বিন্দু দেওয়া আছে। N বিন্দুতে AB-র উপর লম্ব টানতে হবে।



অঙ্কন। N-কে কেন্দ্র করে N এর দুপাশে যে কোন ব্যাসার্ধ নিয়ে পেন্সিল-কম্পাসের সাহায্যে এমন দুটো বৃত্তচাপ টান যেন তারা AB কে দুটো বিন্দুতে ছেদ করে। ধরা যাক এই বিন্দু দুটো C ও D। এখন C ও D কে কেন্দ্র করে CN এর কিছু বেশী ব্যাসার্ধ নিয়ে AB-র একই পাশে দুটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তচাপ আঁক। এই চাপ দুটো ধরা যাক P বিন্দুতে ছেদ করে। PN যোগ কর। তাহলে PN-ই AB-র উপর N বিন্দুতে উদ্দিষ্ট লম্ব।

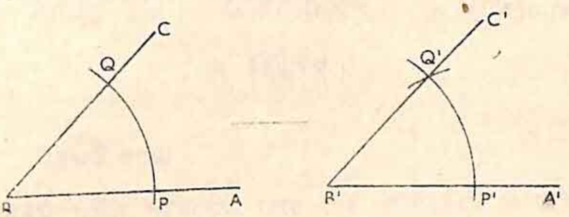
অঙ্কনের অন্য প্রণালী।



অঙ্কন। N কে কেন্দ্র করে যে কোন ব্যাসার্ধের একটি যথেষ্ট বড় বৃত্তচাপ CDE আঁক। এই বৃত্তচাপ ধরা যাক AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে। এর পর C কে কেন্দ্র করে ঐ একই ব্যাসার্ধ নিয়ে আর একটি বৃত্তচাপ আঁক। ধরা যাক এটি প্রথম বৃত্তচাপকে D বিন্দুতে ছেদ করে। এই D কে কেন্দ্র করে একই ব্যাসার্ধ নিয়ে আর একটি বৃত্তচাপ আঁক। এটি ধরা যাক প্রথম বৃত্তচাপকে E বিন্দুতে ছেদ করে। এবারে ED দূরত্বের অর্ধেকের বেশী ব্যাসার্ধ নিয়ে D ও E কে কেন্দ্র করে দুটি পরস্পরচ্ছেদী

বৃত্তচাপ আঁক। এরা ধরা যাক N-ভিন্ন অপর একটি বিন্দু P-তে ছেদ করে। PN যোগ কর। PN-ই উদ্দিষ্ট লম্ব।

সম্পাদ্য V. একটি প্রদত্ত কোণের সমান কোণ অঙ্কন।



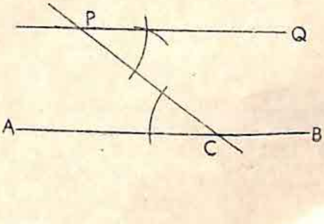
ধরা যাক $\angle ABC$ একটি কোণ দেওয়া আছে। এর সমান করে আর একটি কোণ আঁকতে হবে।

অঙ্কন। যথেষ্ট দীর্ঘ একটি সরলরেখা $B'A'$ টান। তারপর প্রদত্ত $\angle ABC$ কোণের B কে কেন্দ্র করে যে কোন ব্যাসার্ধ নিয়ে পেন্সিল-কম্পাসের সাহায্যে একটি বৃত্তচাপ আঁক। এই বৃত্তচাপ ধরা যাক BA ও BC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। ঐ একই ব্যাসার্ধ নিয়ে B' কে কেন্দ্র করে আর একটি বৃত্তচাপ আঁক। এই বৃত্তচাপ ধরা যাক $B'A'$ কে P' বিন্দুতে ছেদ করে। এখন P' কে কেন্দ্র করে PQ-দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁক। [PQ-দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ পেতে হলে পেন্সিল-কম্পাসের মুখ দুটো P ও Q তে বসিয়ে মুখ দুটোর মধ্যে ফাঁক PQ-র সমান করে নিতে হবে।] ধরা যাক এই বৃত্তচাপ আগের বৃত্তচাপকে Q' বিন্দুতে ছেদ করল। এখন $B'Q'$ যোগ কর। তাহলে $\angle A'B'Q'$ কোণ হবে উদ্দিষ্ট কোণ।

মন্তব্য ঃ $B'A'$ সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে প্রদত্ত কোণটির সমান কোণ আঁকতে হলে ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকেই B' ধরে নিয়ে ঐ অঙ্কন করতে হবে।

সম্পাদ্য VI. প্রদত্ত কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন।

ধরা যাক AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে AB-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা আঁকতে হবে।



অঙ্কন। AB-র উপরিস্থ যে কোন বিন্দু C কে P-র সঙ্গে যুক্ত কর। এরপর সম্পাদ্য V এর নিয়মে PC রেখার P বিন্দুতে $\angle ACP$ কোণের সমান করে একান্তর $\angle CPQ$ কোণ আঁক। তাহলেই PQ উদ্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখা হবে।

———

প্রথম অধ্যায়

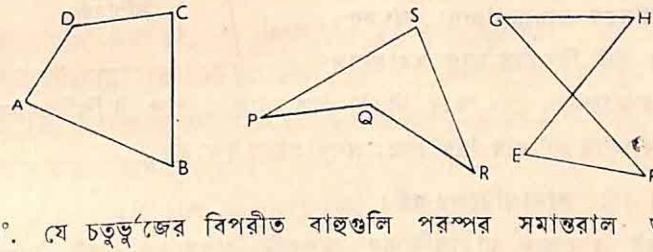
সামান্তরিক। কয়েকটি ধর্ম। প্রয়োগ।

A বিভাগ।

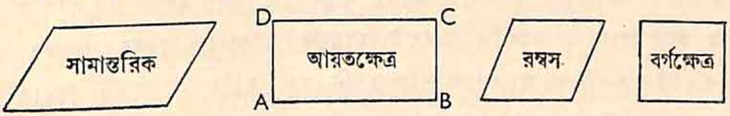
§ 1·1 কয়েকটি সংজ্ঞা।

1°. তিনটি সসীম সরলরেখা দিয়ে ঘেরা সামতলিক ক্ষেত্রকে ত্রিভুজ (triangle) বলা হয়।

2°. চারটি সসীম সরলরেখা দিয়ে যদি কেবলমাত্র একটি সামতলিক ক্ষেত্র ঘেরা হয় তবে সে ক্ষেত্রকে একটি **চতুর্ভুজ** (quadrilateral) বলা হয়। নিচের চিত্রগুলিতে *ABCD* (প্রকৃতপক্ষে *ABCDA*) ও *PQRS* চতুর্ভুজ ; কিন্তু *EFGH* চতুর্ভুজ নয়।



3°. যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাকে **সামান্তরিক** (parallelogram) বলা হয়।



4°. যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ তাকে **আয়তক্ষেত্র** বা আয়ত (rectangle) বলা হয়।

মন্তব্য 1. কোন সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলে তার সবক'টি কোণই সমকোণ হবে। **অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণই সমকোণ।**

এরূপ মন্তব্যের সমর্থনে যুক্তি খুব সোজা। ধরা যাক *ABCD* একটি সামান্তরিক। দেওয়া আছে যে এর $\angle A$ একটি সমকোণ। তাহলে প্রমান করতে হবে যে

$\angle B = \angle C = \angle D = 1$ সমকোণ।

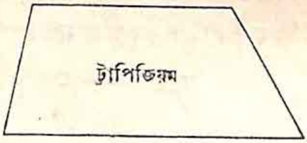
ABCD একটি সামান্তরিক। অতএব *AD* ও *BC** সমান্তরাল এবং *AB* তাদের ভেদক (transversal)। $\therefore \angle A + \angle B = 2$ সমকোণ। কিন্তু $\angle A$ একাই এক সমকোণ। $\therefore \angle B = 1$ সমকোণ। অনুরূপে দেখান যায় যে $\angle B + \angle C = 2$ সমকোণ। কিন্তু এইমাত্র দেখান হয়েছে যে $\angle B = 1$ সমকোণ। অতএব $\angle C = 1$ সমকোণ। অনুরূপে সবশেষে বলা যায় যে $\angle D$-ও এক সমকোণ।

5°. যে সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু সমান তাকে **রম্বস** (rhombus) বলা হয়।

মন্তব্য 2. § 2·2 অনুসিদ্ধান্ত 1 দ্রষ্টব্য।

6°. যে আয়তক্ষেত্রের দুটি সন্নিহিত বাহু সমান তাকে **বর্গক্ষেত্র** (square) বলা হয়। [অর্থাৎ কোন রম্বসের একটি কোণ সমকোণ হলে তাকে বলা হচ্ছে বর্গক্ষেত্র। অবশ্য একটি কোণ সমকোণ হলে সব ক'টি কোণই সমকোণ হবে (মন্তব্য 1)।]

7°. যে চতুর্ভুজের কোন দুটি বিপরীত বাহু সমান্তরাল তাকে **ট্রাপিজিয়ম** (trapezium) বলা হয়। অপর দুটি বিপরীত বাহু সমান্তরাল বা অসমান্তরাল যে কোন কিছুই হতে পারে। তবে ট্রাপিজিয়মের কথা বললে অপর দুটি বাহু সাধারণতঃ অসমান্তরাল বুঝা হয়।



§ 1·2 **সামান্তরিকের ধর্ম।**

এই অনুচ্ছেদে সামান্তরিকের কয়েকটি বিশেষ ধর্ম একটি উপপাদ্যের আকারে বলা হবে। এতে জানা যাবে যে কোন ক্ষেত্র যদি সামান্তরিক হয় তবে তার এ ধর্মগুলি অবশ্যই থাকবে। তাহলে কোন ক্ষেত্রের যদি এর কোন একটি ধর্ম না থাকে তবে তখনি বলা যাবে যে ক্ষেত্রটি সামান্তরিক নয়। বিপরীত পক্ষে, এই ধর্ম থাকলেই যে তা সামান্তরিক হবে এরূপ সিদ্ধান্ত ঠিক হবে না। কারণ এই একই ধর্ম সামান্তরিক ভিন্ন অন্য কোন ক্ষেত্রের যে নেই তা এখনও পর্যন্ত বলা হয়নি। § 1·5 উপপাদ্য 2-তে দেখা যাবে চতুর্ভুজের কোন্ ধর্ম থাকলে তা অবশ্যই সামান্তরিক হয়। সামান্তরিকের আবশ্যিক-ধর্ম ও সামান্তরিক নির্ণায়ক-ধর্ম বলতে কি বুঝান হচ্ছে

* দুটি সরলরেখা সমান্তরাল বলতে গিয়ে সরলরেখা দুটির নামে অক্ষরের যে ক্রম (order) অনুসরণ করা হয়েছে তা লক্ষণীয়।

তা ভাল করে লক্ষ্য করবার মত। ছোট একটি উদাহরণের সাহায্য নেওয়া যাক। একটি ময়ূরের দুটি ডানা আছে। তাহলে দুটি ডানা থাকা ময়ূরের একটি আবশ্যিক ধর্ম। কিন্তু তাই বলে কোন পাখির দুটি ডানা থাকলেই সে ময়ূর হয়ে যায় না। অর্থাৎ দুটি ডানা থাকা 'ময়ূর নির্ণায়ক'-ধর্ম নয়। কিন্তু পাখিটির একটি অপূর্ব সুন্দর পেখম আছে এবং সে মেঘ দেখে পেখম তুলে নাচে—এরূপ শর্ত 'ময়ূর নির্ণায়ক'-শর্ত।

উপপাদ্য 1.

যে কোন সামান্তরিকের

(i) বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান,

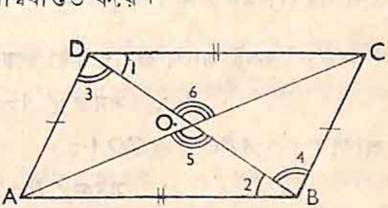
(ii) বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান,

(iii) প্রত্যেকটি কর্ণ সামান্তরিকটিকে দুই সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে

এবং (iv) কর্ণদুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক $ABCD$ যে কোন একটি সামান্তরিক এবং এর দুটি কর্ণ AC ও DB, O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে যে

(i) $AB=DC$ ও $AD=BC$,

(ii) $\angle BAD=\angle DCB$ ও $\angle ABC=\angle CDA$,

(iii) $\triangle ABD\equiv\triangle CDB$* ও $\triangle ABC\equiv\triangle CDA$

এবং (iv) $AO=OC$ ও $BO=OD$.

দ্বিতীয় ধাপ। [কোণের প্রতীকগুলি চিত্রে দেখান হয়েছে।]

$ABCD$ একটি সামান্তরিক। অতএব AB ও DC সমান্তরাল এবং DB তাদের ভেদক (transversal).

$\therefore\ \angle 1=$একান্তর $\angle 2$।

আবার AD ও BC সমান্তরাল এবং DB তাদেরও ভেদক।

$\therefore\ \angle 3=$একান্তর $\angle 4$।

---

* দুটি সর্বসম ত্রিভুজের নামোল্লেখে অক্ষরের ক্রম (order) লক্ষণীয়।

[এরপর যা যা প্রমান করতে হবে তার তৃতীয়টিই প্রথমে সম্পূর্ণ করা যাক। তারপরে প্রথম, দ্বিতীয় ও চতুর্থ অংশের প্রমান পরপর সম্পূর্ণ করা হবে।]

(*iii*) $\therefore$ ABD ও CDB ত্রিভুজ দুটোর মধ্যে দেখা যাচ্ছে যে $\angle 1=\angle 2$, $\angle 4=\angle 3$ এবং DB বাহু সাধারণ। তা হলে ত্রিভুজ দুটো সর্বসম।

অনুরূপে AC-কে ভেদকরূপে নিয়ে দেখান যায় যে $\triangle ABC$ ও $\triangle CDA$ ত্রিভুজ দুটোও সর্বসম।

এখানেই তাহলে উপপাদ্যের (*iii*) অংশের প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

(*i*) এইমাত্র প্রমাণিত হল যে $\triangle ABC$ ও $\triangle CDA$ সর্বসম।

$\therefore$ $AB=DC$ ও $BC=AD$.

এখানেই (*i*)-এর প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

(*ii*) একটু আগে প্রমাণ করা হয়েছে যে $\triangle DAB\equiv\triangle BCD$;

$\therefore$ সমগ্র $\angle A=$ সমগ্র $\angle C$।

আবার $\triangle ABC\equiv\triangle CDA$;

$\therefore$ সমগ্র $\angle B=$ সমগ্র $\angle D$।

এখানেই (*ii*)-এর প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

(*iv*) আবার $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ এর মধ্যে

$\angle 5=$ বিপ্রতীপ $\angle 6$,

পূর্ব্বে প্রমাণিত $\angle 1=\angle 2$

এবং (*i*)-এ প্রমাণিত $AB=CD$।

$\therefore$ $\triangle AOB\equiv\triangle COD$

$\therefore$ $AO=OC$ ও $BO=OD$।

এখানেই (*iv*)-এর প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

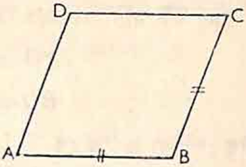
তা হলে উপপাদ্য 1 সম্পূর্ণরূপে প্রতিষ্ঠিত হল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. কোন সামান্তরিকের যে কোন দুই সন্নিহিত বাহু সমান হলে তার সব ক'টি বাহুই সমান হবে। [অর্থাৎ রম্বসের সবগুলি বাহুই সমান।]

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক $ABCD$ একটি সামান্তরিক এবং এর দুটি সন্নিহিত বাহু AB ও BC সমান। তাহলে দেখাতে হবে যে

$[AB=]BC=CD=DA$।



দ্বিতীয় ধাপ।

যেহেতু $ABCD$ একটি সামান্তরিক,

$\therefore$ $AB=$বিপরীত বাহু DC

ও $BC=$বিপরীত বাহু AD।

কিন্তু স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে যে

$AB=BC$।

$\therefore$ $AB=BC=DC=AD$।

এখানেই প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

অনুসিদ্ধান্ত 2. কোন আয়তক্ষেত্রের দুটি সন্নিহিত বাহু সমান হলে তার সব ক'টি বাহুই সমান হবে। [অর্থাৎ বর্গক্ষেত্রের চারটি বাহুই পরস্পর সমান।]

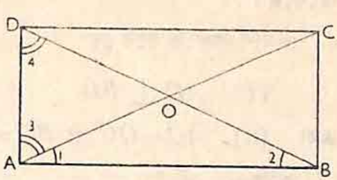
এই অনুসিদ্ধান্তের প্রমাণ অনুসিদ্ধান্ত 1 এর প্রমাণের অনুরূপ। এটি লক্ষ্য করার মত যে এই অনুসিদ্ধান্তে যা বলা হয়েচে তা অনুসিদ্ধান্ত 1 এর মধ্যেও রয়েছে। কারণ সব আয়তক্ষেত্রই সামান্তরিক। সুতরাং সামান্তরিকের সব ধর্মই আয়তক্ষেত্রের থাকবে। অবশ্য আয়তক্ষেত্রের সব ধর্ম সামান্তরিকের নাও থাকতে পারে এবং বস্তুত পক্ষে তা নেইও।

§ 1·3 উদাহরণমালা।

উদাহরণ 1. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হলে সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র হবে। [C.U. '24]

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক $ABCD$ একটি সামান্তরিক এবং $AC=BD$।



এখন প্রমাণ করতে হবে যে $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র। এর জন্য শুধু এই প্রমাণ করলেই চলবে যে $ABCD$ সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ।

দ্বিতীয় ধাপ।

কর্ণ দুটি যদি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে তবে

$$AO=OC=\tfrac{1}{2}\cdot AC$$

$$BO=OD=\tfrac{1}{2}.BD$$

কিন্তু দেওয়া আছে যে

$$AC=BD$$

$$\therefore \quad AO=BO$$

$$\therefore \quad \angle 1=\angle 2$$

আবার $AC=BD$ বলে

$$AO=OD$$

$$\therefore \quad \angle 3=\angle 4$$

$$\therefore \quad \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$$

বা, সমগ্র $\angle A=\angle 2+\angle 4$। ... (i)

কিন্তু $\angle A$, $\angle 2$, $\angle 4$ এরা ABD ত্রিভুজের তিনটি কোণ।

$\therefore \quad \angle A+\angle 2+\angle 4=2$ সমকোণ।

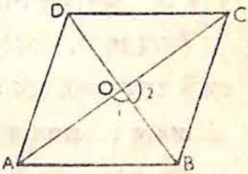
$\therefore$ (i) এর সাহায্যে পাই $\angle A+\angle A=2$ সমকোণ।

$\therefore \quad \angle A=1$ সমকোণ।

$\therefore$ $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র।

উদাহরণ 2. রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।



ধরা যাক $ABCD$ একটি রম্বস এবং তার দুটি কর্ণ AC ও BD O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে

(i) $AC \perp BD$

এবং (ii) $AO=OC$ ও $BO=OD$.

দ্বিতীয় ধাপ।

$ABCD$ একটি রম্বস। তাই তার দুটি সন্নিহিত বাহু সমান। ধরা যাক এই দুটি সমান বাহু হল AB ও BC।

তৃতীয় ধাপ।

রম্বস একটি সামান্তরিক। সুতরাং তার কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। $\therefore\ AO=OC$ ও $BO=OD$; এই হল (*ii*)-এর প্রমাণ।

এখন আমরা প্রমাণ করব যে $AC \perp BD$।

BOA ও BOC ত্রিভুজ দুটির

$AB=BC$ [দ্বিতীয় ধাপে স্বীকৃত]

$AO=OC$ [এইমাত্র প্রমাণিত]

এবং BO সাধারণ বাহু।

$\therefore\ \triangle BOA \equiv \triangle BOC$

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$

কিন্তু $\angle 1+\angle 2=1$ সরলকোণ$=2$ সমকোণ

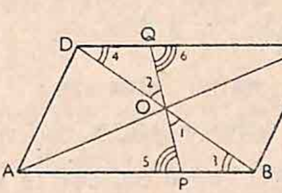
$\therefore\ \angle 1=\angle 2=1$ সমকোণ

$\therefore\ AC \perp BD$

এখানে (*i*)-এর প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

উদাহরণ 3. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখা সামান্তরিকটিকে দুটি সর্বসম ট্রাপিজিয়ামে বিভক্ত করে।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।



ধরা যাক $ABCD$ একটি সামান্তরিক। এর কর্ণ দুটি O-বিন্দুতে ছেদ করেছে। O বিন্দুর ভিতর দিয়ে গেছে এমন যে কোন সরলরেখা POQ টানা হল। ধরা যাক এর ফলে সামান্তরিকটি দুটি ক্ষেত্র $APQD$ ও $CQPB$-তে বিভক্ত হল। তাহলে প্রমাণ করতে হবে যে

(*i*) এই ক্ষেত্র দুটি ট্রাপিজিয়াম

এবং (*ii*) এই ট্রাপিজিয়াম দুটি সর্বসম।

দ্বিতীয় ধাপ।

প্রথম ক্ষেত্রটির $AP \parallel DQ$। অতএব ক্ষেত্রটি একটি ট্রাপিজিয়াম। [AD ও PQ যদি সমান্তরাল হয় তবে সে বিশেষ ক্ষেত্রে ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক হবে।]

অনুরূপে অপর ক্ষেত্রটিও একটি ট্রাপিজিয়াম।

এই হল (i)-অংশের প্রমাণ।

এবারে (ii)-অংশের প্রমাণে আসা যাক।

$\triangle OPB$ ও $\triangle OQD$ এর

$OB = OD$,

$\angle 1 =$ বিপ্রতীপ $\angle 2$,

এবং $\angle 3 =$ একান্তর $\angle 4$ [$\because AB \parallel DC$ ও DB ভেদক]

$\therefore \triangle OPB \equiv \triangle OQD$

$\therefore PB = QD$

অনুরূপে $AP = CQ$

এখন $APQD$ ও $CQPB$ ট্রাপিজিয়াম দুটির মধ্যে

$AP = CQ,\ PQ = QP,\ QD = PB,\ DA = BC$

এবং সমগ্র $\angle A =$ সমগ্র $\angle C$, [সামান্তরিকের বিপরীত কোণ]

$\angle 5 =$ একান্তর $\angle 6$, [$AB \parallel DC$, PQ ভেদক]

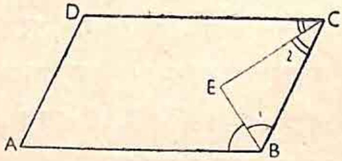
সমগ্র $\angle B =$ সমগ্র $\angle D$

অতএব ট্রাপিজিয়াম দুটি সর্বসম। এখানেই প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

উদাহরণ 4. সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্ব।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক $ABCD$ একটি সামান্তরিক। এর B ও C কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক BE ও CE পরস্পর E বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। দেখাতে হবে যে $EB \perp EC$।



দ্বিতীয় ধাপ।

আমরা জানি যে সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ

$\therefore$ সমগ্র $\angle B +$ সমগ্র $\angle C = 2$ সমকোণ

$\therefore \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 1$ সমকোণ

বা, $\angle 1 + \angle 2 = 1$ সমকোণ।

কিন্তু EBC ত্রিভুজের তিনটি কোণ হল $\angle E$, $\angle 1$, $\angle 2$
অতএব এদের সমষ্টি 2 সমকোণ।

$\therefore$ $\angle E = 1$ সমকোণ

$\therefore$ $EB \perp EC$।

§ 1·4 প্রশ্নমালা 1

1. কোন সামান্তরিকের চারটি বাহু ও একটি কর্ণ সমান হওয়া কি সম্ভব ?

2. $ABCD$ সামান্তরিকের $\angle C = 60^\circ$ এবং $\angle D$ একটি স্থূলকোণ। D থেকে AB-র উপর অঙ্কিত লম্ব AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। এখন সামান্তরিকটির পরিসীমা যদি 40 সে.মি. হয় তবে তার ক্ষুদ্রতর কর্ণটির দৈর্ঘ্য কত ?

3. $ABCD$ সামান্তরিকের BD কর্ণ DC বাহুর সঙ্গে 75° কোণ উৎপন্ন করে। $\angle ABC = 95^\circ$ হলে $\angle DAB$ ও $\angle DBC$ এর পরিমাণ কত ?

4. $ABCD$ সামান্তরিকের $\angle A$ একটি স্থূলকোণ। AX, AY যথাক্রমে BC ও DC এর উপর লম্ব। $\angle XAY = 60^\circ$ হলে $\angle ABC$ কোণের পরিমাপ কত ?

5. $ABCD$ একটি সামান্তরিক এবং O, AB এর মধ্যবিন্দু। $\angle COD$ একটি সমকোণ হলে দেখাও যে $AB = 2BC$।

6. কোন সামান্তরিকের কোন এক কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক সামান্তরিকটির একটি কর্ণ। দেখাও যে সামান্তরিকটি একটি রম্বস।

7. দেখাও যে সামান্তরিকের দুই বিপরীত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় হয় সমান্তরাল নয় সমপাতিত।

   ঐ অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় যখন সমপাতিত হয় তখন ক্ষেত্রটি কিরূপ ?

8. কোন ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদুটো সমান হলে দেখাও যে কোন একটি সমান্তরাল বাহু সংলগ্ন কোণ দুটি সমান।

9. রম্বস নয় এরূপ কোন সামান্তরিকের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক চারটি একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করে—প্রমাণ কর।

10. দুটি সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের কোন ভেদকের অন্তর্ভুক্ত চারটি কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করে—প্রমাণ কর।

11. দেখাও যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং সামান্তরিকের দুই বিপরীত বাহু পর্যন্ত প্রসারিত সমস্ত সরলরেখাই ঐ ছেদবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

12. ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC অতিভুজ। BC-র মধ্যবিন্দু D হলে দেখাও যে $BC=2AD$। [সংকেত। $ABEC$ আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ কর। এর কর্ণগুলি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

13. কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ $30°$ হলে দেখাও যে তার বাহু দুটির মধ্যে ক্ষুদ্রতরটি অতিভুজের অর্ধেকের সমান।

14. $ABDC$ ট্রাপিজিয়ামের $AB \parallel CD$ ও $AB > CD$। AB-র উপর P এমন একটি বিন্দু যে, $CP=CA$ ও $DP=DB$। দেখাও যে, $AB=2CD$। [সংকেত। C ও D থেকে AB-র উপর লম্ব টানতে হবে।]

§ 1·5 চতুর্ভুজ কখন সামান্তরিক হয়।

এই অনুচ্ছেদে সামান্তরিকের এমন কতকগুলি ধর্মের কথা বলা হবে যা সামান্তরিক ভিন্ন অন্য কোন চতুর্ভুজের নেই। অর্থাৎ কোন চতুর্ভুজের যদি এই সব ধর্মের কোন একটি ধর্ম থাকে তবে নিশ্চিতভাবে বলা যায় যে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। চতুর্ভুজের এরূপ ধর্ম তা হলে সামান্তরিক-নির্ণায়ক-ধর্ম।

উপপাদ্য 2.

যদি কোন চতুর্ভুজের

(*i*) দু জোড়া বিপরীত বাহুই সমান হয়,

বা, (*ii*) দু জোড়া বিপরীত কোণই সমান হয়,

বা, (*iii*) যে কোন একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হয়,

বা, (*iv*) কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

তবে চতুর্ভুজটি অবশ্যই একটি সামান্তরিক।

[A quadrilateral becomes a parallelogram if

(*i*) both pairs of opposite sides are congruent,

Or, (*ii*) both pairs of opposite angles are congruent,

Or, (*iii*) one pair of opposite sides is congruent and parallel,

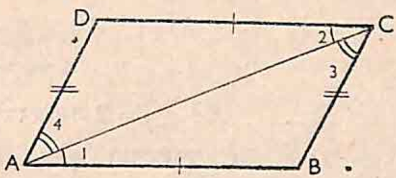
Or, (*iv*) its diagonals bisect one another.]

[এই উপপাদ্যের অংশ চারটি পৃথক পৃথক ভাবে প্রমাণ করা হচ্ছে। চতুর্থ অংশ প্রমাণ করার সময় উপপাদ্যের তৃতীয় অংশ ব্যবহার করা হবে। তৃতীয় অংশের প্রমাণ আগেই দেওয়া হবে। চতুর্থ অংশের প্রমাণে সেই একই কথা আর লেখা হবে না।]

(i) **প্রথম অংশের প্রমাণ। প্রথম ধাপ।**

ধরা যাক $ABCD$ একটি যে কোন চতুর্ভুজ। দেওয়া আছে যে

$AB = DC$ ও $BC = AD$ (1)।



প্রমাণ করতে হবে যে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

দ্বিতীয় ধাপ।

চতুর্ভুজটির AC কর্ণ এঁকে তাকে ABC ও CDA দুটি ত্রিভুজে ভাগ করা হল। এখন এই দুটি ত্রিভুজের একটির তিনটি বাহু অন্যটির তিনটি বাহুর সঙ্গে সমান। কারণ AC বাহু সাধারণ এবং বাকী বাহুগুলি (1)-তে দেওয়াই আছে যে সমান।

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। তাহলে ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ কোণগুলি (corresponding angles) সমান। অতএব

$$\angle 1 = \angle 2, \quad (2)$$
$$\angle 3 = \angle 4, \quad (3)$$

কিন্তু AB ও DC সরলরেখা দুটির ভেদক AC ; $\angle 1$ ও $\angle 2$ তাদের দ্বারা উৎপন্ন একান্তর কোণ। অতএব (2)-থেকে আমাদের সিদ্ধান্ত এই যে

$$AB \parallel DC$$

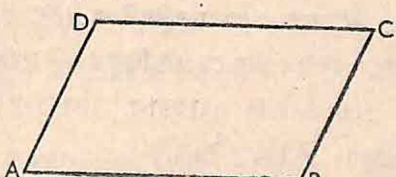
অনুরূপে (3)-থেকে সিদ্ধান্ত হল

$$BC \parallel AD$$

অতএব সামান্তরিকের সংজ্ঞা অনুসারে $ABCD$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

(ii) **দ্বিতীয় অংশের প্রমাণ। প্রথম ধাপ।**

ধরা যাক $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। দেওয়া আছে যে



$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle C \\ \text{ও} \quad \angle B = \angle D\end{array}\right\} \quad (3)$$

প্রমাণ করতে হবে যে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

দ্বিতীয় ধাপ।

প্রদত্ত সর্ত (3) থেকে লেখা যায়

$$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D \quad (4)$$

কিন্তু চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি চার সমকোণ। অতএব

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4 \text{ সমকোণ।}$$

(4) এর সাহায্য নিয়ে একে লেখা যায়

$$(\angle A+\angle B)+(\angle A+\angle B)=4 \text{ সমকোণ}$$

$$\therefore \ 2(\angle A+\angle B)=4 \text{ সমকোণ}$$

$$\therefore \ \angle A+\angle B=2 \text{ সমকোণ} \quad (5)$$

কিন্তু AD ও BC সরলরেখা দুটির AB ভেদক ; $\angle A$ ও $\angle B$ হল ওদের দ্বারা উৎপন্ন ভেদকের একই পার্শ্বে অবস্থিত অন্তঃস্থ কোণ। (5) থেকে দেখা যাচ্ছে এদের সমষ্টি দু সমকোণ। সুতরাং

$$BC \parallel AD\text{।}$$

অনুরূপে $\quad AB \parallel DC$।

অতএব সামান্তরিকের সংজ্ঞা অনুসারে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

(*iii*) **তৃতীয় অংশের প্রমাণ। প্রথম ধাপ।** [প্রথম অংশের চিত্র দ্রষ্টব্য]

ধরা যাক $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। দেওয়া আছে যে এর যে কোন দুটি বাহু সমান ও সমান্তরাল। ধরা যাক এই দুটি বাহু হল AB ও DC। তাহলে দেওয়া আছে যে

$$\begin{cases} AB=DC & (6) \\ AB \parallel DC & (7) \end{cases}$$

প্রমাণ করতে হবে যে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

দ্বিতীয় ধাপ।

AC কর্ণ এঁকে চতুর্ভুজটিকে ABC ও CDA দুটি ত্রিভুজে ভাগ করা হল। প্রথমে দেখান হবে যে এই ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

AB ও CD সমান্তরাল, বলে দেওয়া আছে। AC এদের ভেদক। অতএব $\angle 1=\angle 2$।

তাহলে ত্রিভুজ দুটির দুটি বাহু AB ও DC সমান। (6)-তে দেওয়া আছে, AC বাহু সাধারণ এবং এই বাহুগুলির অন্তর্ভুক্ত $\angle 1=$ অন্তর্ভুক্ত $\angle 2$।

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

$$\therefore \quad \angle 3 = \angle 4$$

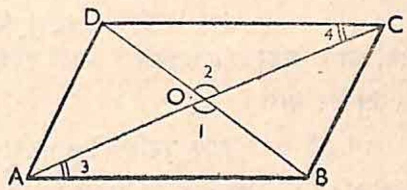
কিন্তু এই কোণ দুটিকে BC, AD দুই সরলরেখা ও তাদের ভেদক AC দ্বারা উৎপন্ন একান্তর কোণ বলে গণ্য করা যায়।

$$\therefore \quad BC \parallel AD \quad (8)$$

(7) ও (8) থেকে দেখা যাচ্ছে যে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

(*iv*) **চতুর্থ অংশের প্রমাণ। প্রথম ধাপ।**

ধরা যাক $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ এবং তাদের কর্ণ দুটি O বিন্দুতে ছেদ করে। দেওয়া আছে যে কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। অর্থাৎ দেওয়া আছে যে



$$AO = OC, \quad BO = OD\text{।}$$

এখন দেখাতে হবে যে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

দ্বিতীয় ধাপ।

AOB ও COD ত্রিভুজ দুটিতে

$$\left.\begin{aligned} AO &= OC \\ BO &= OD \end{aligned}\right\} \quad (\text{দেওয়া আছে})$$

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle 1 =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle 2$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

অতএব ঐ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

$$\therefore \quad \angle 3 = \angle 4 \quad (9)$$

কিন্তু AB ও DC দুটি সরলরেখা এবং AC তাদের ভেদক। $\angle 3$ ও $\angle 4$ তাদের দ্বারা উৎপন্ন একান্তর কোণ। অতএব (9) থেকে বলা যায়

$$AB \parallel DC$$

অনুরূপে BOC ও DOA ত্রিভুজ দুটিকে নিয়ে দেখান যায় যে

$$BC \parallel AD$$

অতএব চতুর্ভুজটির উভয় বিপরীত বাহুযুগল সমান্তরাল। অতএব ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক।

§ 1·6 উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. যে চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে সে চতুর্ভুজ একটি রম্বস।

প্রমাণ। [§ 1·3 উদাহরণ 2 এর চিত্র দ্রষ্টব্য।]

প্রথম ধাপ।

ধরা যাক $ABCD$ একটি যে কোন চতুর্ভুজ এবং এর কর্ণ দুটি O বিন্দুতে ছেদ করেছে। আরও ধরে নেওয়া হচ্ছে যে

$$AO=OC,\ BO=OD$$

এবং $$AC \perp BD \quad (1)$$

প্রমাণ করতে হবে যে চতুর্ভুজটি একটি রম্বস।

দ্বিতীয় ধাপ।

কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। সুতরাং ক্ষেত্রটি অবশ্যই একটি সামান্তরিক। এখন এই দেখালেই চলবে যে, এই সামান্তরিকের যে কোন দুটি সন্নিহিত বাহু সমান। তাহলেই সংজ্ঞানুসারে ক্ষেত্রটি একটি রম্বস হবে।

এখন AOB ও COB ত্রিভুজ দুটিতে

$AO=CO,$

BO সাধারণ।

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle 1=$ অন্তর্ভুক্ত $\angle 2$, কারণ (1) থেকে দেখা যাচ্ছে এই কোণগুলি প্রত্যেকে সমকোণ। অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

$\therefore\ AB=BC$।

অতএব ক্ষেত্রটি একটি রম্বস।

উদাহরণ 2. $ABCD$ সামান্তরিকের AB ও DC বাহুর উপর যথাক্রমে A' ও C' দুটি বিন্দু। যদি $AA'=CC'$ হয় তবে $A'BC'D$ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ। যেহেতু $ABCD$ একটি সামান্তরিক, অতএব

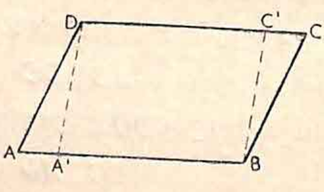
$AB=DC$

কিন্তু $AA'=CC'$

$\therefore\ AB-AA'=DC-CC'$,

বা $A'B=DC'$

তাছাড়া $A'B \parallel DC'$।

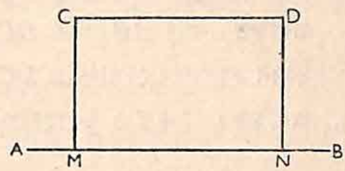


$\therefore\ A'BC'DA'$ এর দুই বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল। অতএব ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক।

উদাহরণ 3. যে কোন সরলরেখা AB থেকে সমদূরবর্তী এবং AB-র একই পার্শ্বে অবস্থিত C ও D দুটি বিন্দু হলে দেখাও যে C, D সংযোজক সরলরেখা AB-র সমান্তরাল।

প্রমাণ।

C ও D থেকে AB-র উপর লম্বের পাদবিন্দু ধরা যাক যথাক্রমে M ও N $MC=ND$।



তাহলে আবার MC ও ND একই রেখা AB-র উপর লম্ব। অতএব তারা সমান্তরাল। সুতরাং $MNDC$ চতুর্ভুজের MC ও ND দুই বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল। সুতরাং $MNDC$ একটি সামান্তরিক।

সুতরাং $CD \parallel MN$; অর্থাৎ $CD \parallel AB$।

§ 1·7 প্রশ্নমালা 1

1. $ABCD$ সামান্তরিকের BA-কে A-র দিকে ও DC-কে C-র দিকে বাড়িয়ে দেওয়া হল। এখন BA-র বর্দ্ধিতাংশের উপর A' ও DC-র বর্দ্ধিতাংশের উপর C' দুটি বিন্দু এমনভাবে নেওয়া হল যে $AA'=CC'$। দেখাও যে $A'BC'DA'$ ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক।

2. $ABCDA$ ও $ABEFA$ দুটি সামান্তরিক। দেখাও যে, $DCEFD$ একটি সামান্তরিক।

3. কোন চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ যদি সমান হয় ও পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে দেখাও যে, চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র।

[সংকেত। § 1·6 উদাহরণ 1-এর সঙ্গে এখানে যে অতিরিক্ত সর্ত দেওয়া আছে তা হল $AC=BD$। $\therefore \frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD$

$\therefore \ AO=OB$

তাহলে AOB ত্রিভুজের $\angle OAB=\angle OBA$। কিন্তু $\angle AOB=$এক সমকোণ। $\therefore \ \angle OAB=45^\circ$। অনুরূপে AOD ত্রিভুজের $\angle OAD=45^\circ$। $\therefore \ \angle BAD=90^\circ$; $\therefore \ ABCD$ রম্বসটি একটি বর্গক্ষেত্র।]

4. সামান্তরিকের দুই বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করলে যে রেখা পাওয়া যাবে তা অন্য বাহুগুলির সমান্তরাল হবে।

5. $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB \parallel DC$। B ও D বিন্দু দুটি AC কর্ণ থেকে সমান দূরে আছে। দেখাও যে $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

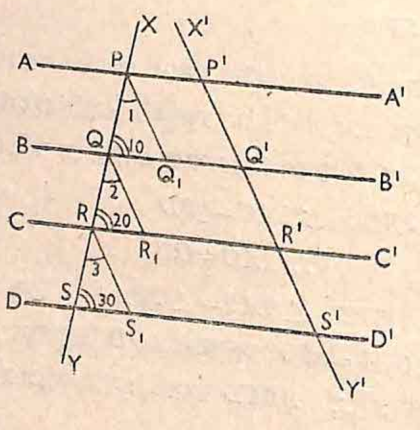
6. $ABDC$ ও $A'B'D'C'$ সামান্তরিক দুটির AB ও $A'B'$ বাহু দুটি XY সরলরেখার উপর এবং DC ও $D'C'$ বাহুগুলি XY রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত। যদি AB থেকে DC-র দূরত্ব এবং $A'B'$ থেকে $D'C'$ এর দূরত্ব সমান হয়, তবে দেখাও যে DC ও $D'C'$, XY-র সমান্তরাল একই রেখায় অবস্থিত। [§ 2·6, উদাহরণ 3 দেখ।]

B বিভাগ

এই বিভাগে আগের বিভাগের সাহায্য নিয়ে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য প্রমাণ করা হবে।

§ 1·8 উপপাদ্য 3.

তিন বা তার অধিক সংখ্যক সমান্তরাল সরলরেখা তাদের কোন ভেদক থেকে যদি সমান সমান অংশ ছিন্ন করে তবে তারা তাদের অপর যে কোন ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ ছিন্ন করবে।



প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক AA', BB', CC', DD' কতকগুলি সমান্তরাল সরলরেখা এবং XY সরলরেখা তাদের যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন যদি $PQ=QR=RS$ হয় তবে দেখাতে হবে যে সমান্তরাল সরলরেখা-গোষ্ঠী অপর যে কোন ভেদক থেকেও সমান সমান অংশ ছিন্ন করবে। অর্থাৎ $X'Y'$ যদি অপর কোন ভেদক হয় এবং ঐ সমান্তরাল সরলরেখাগুলিকে যথাক্রমে P', Q', R', S' বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাতে হবে যে $P'Q'=Q'R'=R'S'$, সংক্ষেপে বলা চলে ঃ

দেওয়া আছে ঃ $PQ=QR=RS$ (1)

দেখাতে হবে ঃ $P'Q'=Q'R'=R'S'$।

দ্বিতীয় ধাপ।

যদি $X'Y'$, XY-র সমান্তরাল হয় তবে $PQQ'P'$ একটি সামান্তরিক।

$$\therefore PQ=P'Q'$$

অনুরূপে
$$QR=Q'R'$$
$$RS=R'S'$$

$\therefore$ (1) থেকে পাওয়া যায় যে,

$$P'Q'=Q'R'=R'S'$$

তাহলে এই বিশেষ ক্ষেত্রে উপপাদ্যটি প্রতিষ্ঠিত হয়।

তৃতীয় ধাপ।

যদি $X'Y'$ ও XY সমান্তরাল না হয় তবে P, Q, R বিন্দুগুলির প্রত্যেকটির মধ্য দিয়ে $X'Y'$-এর সমান্তরাল সরলরেখা টানা যাক। এই সরলরেখাগুলি BB', CC', DD' কে ধরা যাক যথাক্রমে Q_1, R_1, S_1 বিন্দুতে ছেদ করে।

চতুর্থ ধাপ।

অঙ্কন অনুসারে $PQ_1Q'P'$, $QR_1R'Q'$, $RS_1S'R'$-এদের প্রত্যেকেরই বিপরীত বাহুজোড়া সমান্তরাল। অতএব এরা প্রত্যেকেই এক একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ $P'Q'=PQ_1$, $Q'R'=QR_1$, $R'S'=RS_1$ (2)

[অগ্রসর হওয়ার সংকেত। এখন যদি কোন উপায়ে দেখাতে পারা যায় যে এই সমীকরণগুলির ডানপক্ষগুলি সমান, অর্থাৎ $PQ_1=QR_1=RS_1$ তবে

$P'Q'=Q'R'=R'S'$ হবে এবং আমাদের উদ্দেশ্য সিদ্ধ হবে। এজন্য প্রথমে PQQ_1, QRR_1 ও RSS_1 ত্রিভুজগুলিকে সর্বসম দেখাতে হবে।]

PQ_1 ও QR_1 সরলরেখা দুটি $X'Y'$-এর সমান্তরাল।

অতএব PQ_1 ও QR_1 সমান্তরাল। XY তাদের ভেদক।

অতএব $\angle 1=$অনুরূপ $\angle 2$

আবার $BB' \parallel CC'$ এবং XY তাদের ভেদক

$\therefore \angle 10=$অনুরূপ $\angle 20$।

তাহলে PQQ_1 ও QRR_1 ত্রিভুজ দুটিতে

$$\angle 1=\angle 2, \quad \angle 10=\angle 20$$

এবং (1) অনুসারে, $PQ=QR$

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম,

$$\therefore PQ_1=QR_1$$

অনুরূপে QRR_1 ও RSS_1 ত্রিভুজ দুটির সর্বসমতা থেকে দেখা যায় যে,

$$QR_1=RS_1$$

$$\therefore PQ_1=QR_1=RS_1$$

$\therefore$ (2) থেকে দেখা যায় যে

$$P'Q'=Q'R'=R'S'\text{।}$$

পঞ্চম ধাপ।

এ পর্যন্ত যে প্রমাণ দেওয়া হল তা মাত্র চারটি সমান্তরাল সরলরেখাকে নিয়ে। কিন্তু প্রমাণের ধরণ থেকে এটি স্পষ্ট যে, এই সমান্তরাল সরলরেখার সংখ্যা যাই হোক না কেন প্রমাণ অনুরূপভাবেই হবে—শুধু তার কলেবর বৃদ্ধি পাবে মাত্র।

উপরের যুক্তিই তাহলে উপপাদ্যটিকে সম্পূর্ণরূপে প্রতিষ্ঠিত করল।

§ 1·9 উদাহরণমালা।

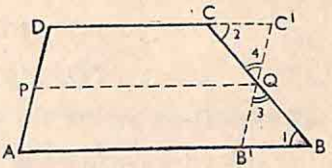
উদাহরণ 1: কোন ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহু দুটির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা ট্রাপিজিয়ামের

(*i*) সমান্তরাল বাহু দুটির সমান্তরাল

এবং (*ii*) সমান্তরাল বাহু দুটির সমষ্টির অর্দ্ধেক।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক $ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম যার AD ও BC অসমান্তরাল। AD-র মধ্যবিন্দু P ও BC-র মধ্যবিন্দু Q যোগ করা হল। প্রমাণ করতে হবে যে



$(i)\quad PQ \parallel AB\ (\parallel DC)$

এবং $(ii)\quad PQ=\frac{1}{2}(AB+DC)$।

দ্বিতীয় ধাপ।

Q বিন্দুর মধ্য দিয়ে AD-র সমান্তরাল $B'C'$ টানা যাক। AB ও DC-এর একটিকে এবং অপরটির বর্দ্ধিতাংশকে $B'C'$ যে বিন্দুতে ছেদ করে ধরা যাক তারা যথাক্রমে B' ও C'।

তৃতীয় ধাপ।

Q, BC-এর মধ্যবিন্দু

$\therefore\quad BQ=QC$

আবার $AB \parallel DC$ এবং BC তাদের ভেদক

$\therefore\quad \angle 1=\angle 2$

অতএব QBB' ও QCC' ত্রিভুজ দুটিতে

$BQ=CQ$

$\angle 1=\angle 2$

এবং $\angle 3=$ বিপ্রতীপ $\angle 4$

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

$\therefore\quad B'Q=C'Q$

তাহলে Q, $B'C'$ এর মধ্যবিন্দু এবং

$B'Q=\frac{1}{2}.B'C'$

$B'C'$ এর অঙ্কন অনুসারে $AB'C'D$ একটি সামান্তরিক।

$\therefore\quad AD=B'C'$

$\therefore\quad \frac{1}{2}\,AD=\frac{1}{2}\,B'C'$

$\therefore\quad AP=B'Q$

অতএব $AB'QP$ চতুর্ভুজের AP ও $B'Q$ সমান ও সমান্তরাল।
অতএব এটি একটি সামান্তরিক।

$$\therefore \quad PQ \parallel AB'$$

$$\therefore \quad PQ \parallel AB \ (\parallel DC)$$

এইখানে (i)-এর জন্য প্রমাণ সম্পূর্ণ হ'ল।

একটু আগে দেখান হয়েছে যে QBB' ও QCC' ত্রিভুজ দুটি সর্বসম,

$$\therefore \quad BB' = CC'।$$

আবার $AB'C'D$ একটি সামান্তরিক,

$$\therefore \quad AB' = DC'$$

$$\therefore \quad PQ = AB' = \tfrac{1}{2}(AB' + AB') = \tfrac{1}{2}(AB' + DC')$$

$$= \tfrac{1}{2}(AB - B'B + DC + CC') \quad \text{[উপরে যে চিত্র এঁকে দেখান}$$

$$= \tfrac{1}{2}(AB + DC) \quad \text{আছে সেই অনুসারে]}$$

আবার ট্রাপিজিয়ামটি যদি এমন থাকে যে AB-র বর্দ্ধিতাংশের উপর B' থাকে [যে চিত্র অঙ্কিত নয়] তবে

$$PQ = \tfrac{1}{2}(AB' + DC')$$

$$= \tfrac{1}{2}(AB + BB' + DC - CC')$$

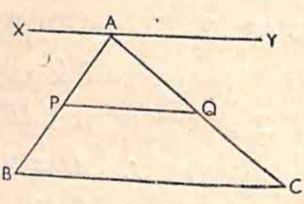
$$= \tfrac{1}{2}(AB + DC)।$$

এইখানে (ii)-এর জন্য প্রমাণ সম্পূর্ণ হ'ল।

উদাহরণ 2. কোন ত্রিভুজের যে কোন একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে ভূমির সমান্তরাল কোন সরলরেখা টানলে তা অপর বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক ABC একটি ত্রিভুজ এবং AB-র মধ্যবিন্দু P। P দিয়ে BC-র সমান্তরাল PQ টানা হ'ল এবং ধরা যাক তা AC কে Q বিন্দুতে ছেদ করল। তাহলে প্রমাণ করতে হবে যে, $AQ = QC$।



দ্বিতীয় ধাপ।

A বিন্দুর ভিতর দিয়ে BC-র সমান্তরাল XAY রেখা টানা যাক। তা হলে XY, PQ ও BC তিনটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল এবং তারা তাদের ভেদক AB থেকে দুটি সমান অংশ AP ও BP ছিন্ন করে। অতএব ঐ সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি তাদের ভেদক AC থেকেও দুটি সমান অংশ ছিন্ন করবে। অতএব Q, AC-এর মধ্যবিন্দু, অর্থাৎ $AQ = QC$।

উদাহরণ 3. কোন ত্রিভুজের কোন বাহু কয়েকটি বিন্দু দ্বারা কয়েকটি সমান খণ্ডে বিভক্ত হয়েছে। ঐ বিন্দুগুলো দিয়ে ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানলে তারা অপর বাহুকে সমসংখ্যক সমান খণ্ডে বিভক্ত করবে।

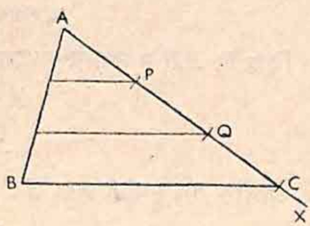
প্রমাণ। সংকেত।

উদাহরণ 2-এর মত শীর্ষ বিন্দু দিয়ে ভূমির সমান্তরাল একটি সরলরেখা টেনে নিয়ে ঐ উদাহরণেরই মত প্রমাণ করতে হবে।

উদাহরণ 3-এর ব্যবহারিক প্রয়োগ।

কোন একটি সসীম সরলরেখাকে কয়েকটি সমান খণ্ডে ভাগ করতে হলে উদাহরণ 3-এর সাহায্যে তা করা যায়। ধরা যাক AB সরলরেখাকে সমান তিন ভাগে ভাগ করতে হবে।

A-র ভিতর দিয়ে যে কোন একটি সরলরেখা AX নেওয়া হল। পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে A থেকে সুরু করে পরপর তিনটি সমান দৈর্ঘ্য AX থেকে কেটে নেওয়া হল। এই খণ্ডগুলি মনে করা যাক পরপর AP, PQ, QC। এখন BC যোগ করে নিতে হবে এবং P, Q, বিন্দু দুটোর মধ্য দিয়ে ABC ত্রিভুজের ভূমি CB-র সমান্তরাল সরলরেখা দুটো টানতে হবে। তারা AB কে যে বিন্দুগুলোতে ছেদ করবে সেই বিন্দুগুলোই AB কে সমান তিন ভাগে ভাগ করবে।



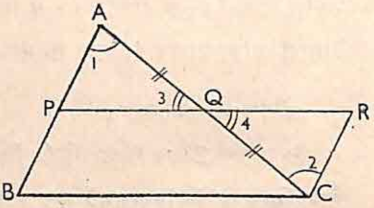
এই নিয়মে কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখাকে যতগুলি খুশী সমান খণ্ডে বিভক্ত করা যায়।

§ 1·10 উপপাদ্য 4

ত্রিভুজের যে কোন একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানলে তা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে এবং অঙ্কিত সরলরেখাটি সমান্তরাল বাহুর অর্ধেক হবে।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক ABC একটি ত্রিভুজ এবং AB-র মধ্যবিন্দু P। P-দিয়ে BC-র সমান্তরাল PQ টানা হল। ধরা যাক PQ AC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ করতে হবে যে

$$AQ=QC \text{ ও } PQ=\tfrac{1}{2}BC।$$

দ্বিতীয় ধাপ।

C-র মধ্য দিয়ে BA-র সমান্তরাল CR টানা হ'ল। ধরা যাক তা বর্দ্ধিত PQ কে R বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন $BP \parallel CR$ এবং $BC \parallel PR$; অতএব $BCRP$ একটি সামান্তরিক।

অতএব $BP=CR$

কিন্তু P, AB-র মধ্যবিন্দু বলে

$$BP=AP$$

$$\therefore \quad AP=CR \qquad (1)$$

আবার $BA \parallel CR$ এবং AC তাদের ছেদক।

$$\therefore \quad \angle 1=\text{একান্তর } \angle 2 \qquad (2)$$

আবার $\angle 3=$ বিপ্রতীপ $\angle 4$ (3)

(1), (2) ও (3) থেকে দেখা যাচ্ছে যে APQ ও CRQ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

$$\therefore \quad AQ=QC \qquad (4)$$

এবং $PQ=QR$ (5)

(4) থেকে উপপাদ্যের প্রথম অংশের প্রমান সম্পূর্ণ হচ্ছে এবং (5) থেকে দেখা যাচ্ছে যে

$$PQ=\frac{1}{2}PR=\frac{1}{2}BC\text{।}$$

এতেই উপপাদ্যের দ্বিতীয় অংশ প্রমাণিত হল।

[এই উপপাদ্যের শুধু প্রথম অংশের জন্য §1·9 উদাহরণ 2-তে একটি বিকল্প ও সহজতর প্রমাণ পাওয়া যাবে।]

§ 1·11 উপপাদ্য 5

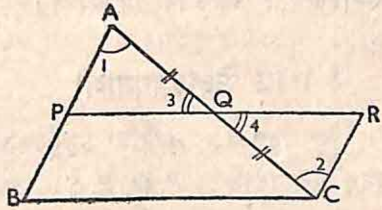
কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ। এবং এর AB ও AC বাহু দুটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q।

প্রমাণ করতে হবে যে

$PQ \parallel BC$ ও $PQ=\frac{1}{2}BC$।



দ্বিতীয় ধাপ।

C-র মধ্য দিয়ে BA-র সমান্তরাল CR টানা যাক। ধরা যাক CR বর্ধিত PQকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন $BA \parallel CR$ এবং AC তাদের ভেদক।

$\therefore \angle 1=$একান্তর $\angle 2$। (1)

$\angle 3=$বিপ্রতীপ $\angle 4$। (2)

Q, AC-র মধ্যবিন্দু বলে

$AQ=CQ$। (3)

(1), (2) ও (3) থেকে দেখা যাচ্ছে যে APQ ও CRQ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

$\therefore \quad AP=CR$

ও $\quad PQ=QR$।

আবার $\quad AP=BP$,

$\therefore BP=CR$।

—3

BP ও CR তাহলে সমান ও সমান্তরাল। অতএব $BCRP$ একটি সামান্তরিক।

$$\therefore \quad PQ \parallel BC \qquad (4)$$

এবং
$$BC = PR = PQ + QR$$
$$= 2PQ$$

বা
$$PQ = \tfrac{1}{2}BC \text{।} \qquad (5)$$

(4)-থেকে উপপাদ্যের প্রথম অংশ এবং (5) থেকে উপপাদ্যের দ্বিতীয় অংশ প্রমাণিত হচ্ছে।

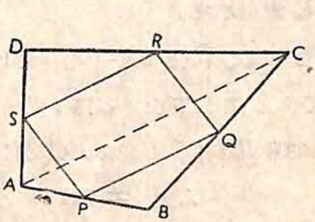
মন্তব্য। ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুটোর ক্ষুদ্রতরটিকে অতি ক্ষুদ্র, আরও ক্ষুদ্র, ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র বলে কল্পনা করলে ট্রাপিজিয়মের সর্বশেষ অবস্থা দাঁড়ায় একটি ত্রিভুজ। তাহলে কার্যতঃ ত্রিভুজও একটি ট্রাপিজিয়ম। এরূপ ট্রাপিজিয়মের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য শূন্য। সুতরাং §1·9 উদা. 1-তে প্রতিষ্ঠিত ট্রাপিজিয়মের গুণাবলী ত্রিভুজেও বর্তাবে। বস্তুতঃপক্ষে উপপাদ্য 5 ঐ উদাহরণেরই একটি বিশেষ অবস্থা।

§ 1·12 উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. $ABCD$ চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে P, Q, R, S। প্রমাণ কর যে $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ।

AC কর্ণ টানা হল।



এখন ACB একটি ত্রিভুজ। এর AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু P ও Q।

অতএব $PQ \parallel AC$।

অনুরূপে DAC ত্রিভুজ থেকে

$SR \parallel AC$।

$\therefore \; PQ \parallel SR$।

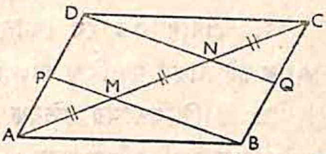
অনুরূপে $SP \parallel RQ$।

অতএব $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

উদাহরণ 2. $ABCD$ একটি সামান্তরিক। AD ও BC-র মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। প্রমাণ কর যে AC কর্ণকে PB ও DQ দুটি রেখা সমান তিন টুকরায় বিভক্ত করেছে।

প্রমাণ।

ধরা যাক PB ও DQ রেখা দুটি AC কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে।



এখন CBM ত্রিভুজের CB বাহুর মধ্যবিন্দু Q। এর ভিতর দিয়ে ভূমি BM এর সমান্তরাল QN একটি রেখা। (PD ও BQ সমান ও সমান্তরাল হওয়ায় $PBQD$ একটি সামান্তরিক। সেজন্য $QD \parallel BP$ অর্থাৎ $QN \parallel BM$) অতএব N, CM-এর মধ্যবিন্দু।

$$\therefore \quad CN = NM \ldots \quad (1)$$

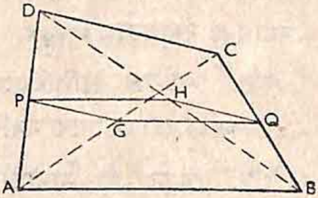
অনুরূপে ADN ত্রিভুজের M, AN-এর মধ্যবিন্দু।

$$\therefore \quad NM = MA \ldots \quad (2)$$

(1) ও (2) থেকে প্রমাণ সম্পূর্ণ হচ্ছে।

উদাহরণ 3. $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q এবং AC ও BD কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে G ও H। প্রমাণ কর যে,

(i) $PGQH$ একটি সামান্তরিক ও (ii) PQ ও GH পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



প্রমাণ।

CAB ত্রিভুজের CA-র মধ্যবিন্দু G এবং CB-র মধ্যবিন্দু Q।

$$\therefore \quad GQ \parallel AB।$$

অনুরূপে DAB ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায় যে,

$$PH \parallel AB।$$

$$\therefore \quad GQ \parallel PH।$$

অনুরূপে BCD ও ACD ত্রিভুজ দুটি থেকে পাওয়া যায় যে,

$$QH \parallel CD \parallel GP।$$

অতএব $PGQH$ একটি সামান্তরিক ($GQ \parallel PH$, $QH \parallel GP$)।

এতে (i)-অংশ প্রমাণিত হল।

আবার $PGQH$ একটি সামান্তরিক বলে এর কর্ণগুলি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। অর্থাৎ PQ ও GH পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। এই হল (ii) অংশের প্রমাণ।

§ 1·13 প্রশ্নমালা

1. প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের কোন বাহুর দ্বিখণ্ডক মধ্যমা এবং অপর দুই বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

2. ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহু দুটির মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা কর্ণ দুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB=BC$ এবং $CD=DA$। চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যোগ করে যাওয়া হল। দেখাও যে, একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন হবে।

4. $ABCD$ চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S। প্রমাণ কর যে PR ও QS পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[সংকেত। § 1·12 উদাহরণ 1 দ্রষ্টব্য।]

5. ABC ও $A'B'C'$ ত্রিভুজ দুটির AB ও $A'B'$ উভয় বাহুর মধ্যবিন্দু X এবং AC ও $A'C'$ এই উভয় বাহুর মধ্যবিন্দু Y। দেখাও যে BC ও $B'C'$ সমান ও সমান্তরাল।

6. $ABCD$ ট্রাপিজিয়মের $AD \parallel BC$ ও $AB=BC$। দেখাও যে AC কর্ণ BAD কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

7. কোন এক সামান্তরিককে ছেদ করে না এরূপ একটি সরলরেখার উপর সামান্তরিকটির শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে লম্ব আঁকা হল। দেখাও যে, যে কোন দুই বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে আঁকা লম্ব দুটির সমষ্টি এবং অপর দুটি বিপরীত শীর্ষ থেকে আঁকা লম্ব দুটির সমষ্টি সমান।

8. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির কোন বিন্দু থেকে সমান দুটি বাহুর উপর আঁকা লম্ব দুটির সমষ্টি ভূমির যে কোন প্রান্তবিন্দু থেকে বিপরীত বাহু পর্যন্ত আঁকা লম্বের সমান।

9. দেখাও যে আয়তক্ষেত্রের পর পর বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যোগ করে গেলে একটি রম্বস উৎপন্ন হবে।

10. $CDEF$ সামান্তরিকের DE ও CF এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A ও B। AC ও AF পরস্পরের লম্ব হলে দেখাও যে $ABCD$ একটি রম্বস।

দ্বিতীয় অধ্যায়
ক্ষেত্র পরিমাপ

§ 2·1. ক্ষেত্র পরিমাপ।

অনেক সময় বলা হয়, এই জমিটির চেয়ে ওই জমিটি অনেক ছোট, কিংবা জমিটি ছোট হলে কি হবে ফলন পাওয়া যায় বেশ। এরকম কথা থেকে বুঝা যায় যে ক্ষেত্রের বড় ছোটর ধারণা একটা রয়েছে। তাহলে তারা পরিমাপযোগ্য জিনিস এবং কোন ক্ষেত্রের পরিমাণের আধিক্য ও অল্পতা থেকেই এই বড়-ছোটর ধারণা জন্মে।

ক্ষেত্র পরিমাপের প্রয়োজন আজকের নয়। জমির বিনিময়, কেনা-বেচা, প্রভৃতির প্রয়োজনে ক্ষেত্র পরিমাপ জ্যামিতির গোড়ার জিনিস। জ্যামিতি আজ তার বহু বিস্তৃত পরিধির মধ্যে যে রূপ পেয়েছে, আগে অবশ্য তাতে এতটা শৃঙ্খলা ছিল না। কিন্তু ক্ষেত্র পরিমাপ করা হ'ত, যদিও সে পরিমাপ হ'ত স্থূল।

সংজ্ঞা। কোন সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রের সীমার মধ্যে তার নিজের সমতলে যতটুকু জায়গা (space) বা ক্ষেত্র থাকে তাকে ঐ ক্ষেত্রের **ক্ষেত্রফল** বা কালি (area) বলা হয়।

দুটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে বলা হয় ক্ষেত্র দুটি সমান। দুটি ক্ষেত্র সমান বলা আর সর্বসম বলা এক নয়। তবে ক্ষেত্র দুটি সর্বসম হলে তারা অবশ্যই সমান হয় —সমান হলে সর্বসম নাও হ'তে পারে।

§ 2·2. কয়েকটি সংজ্ঞা।

ত্রিভুজের যে কোন একটি বাহুকে **ভূমি** (base) বললে তার বিপরীত কৌণিক বিন্দুকে বলা হয় **শীর্ষ** (vertex)। ঐ শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকে বলা হয় ত্রিভুজের **উচ্চতা** বা **উন্নতি** (altitude বা height)। ত্রিভুজের যে কোন বাহুকে ভূমি ধরা চলে। উচ্চতাও তেমনি তিনটির যে কোনটি হতে পারে।

সামান্তরিকের যে কোন দুই সমান্তরাল বাহুর একটিকে ভূমি এবং ঐ সমান্তরাল বাহু দুটির মধ্যে লম্ব-দূরত্বকে (perpendicular distance) সামান্তরিকের উচ্চতা বলা হয়।

ট্রাপিজিয়মের দুই সমান্তরাল বাহুর যে কোনটিকে ভূমি বলা যায়। এবং সমান্তরাল বাহু দুটির মধ্যে লম্ব-দূরত্বকে তার উচ্চতা বলা হয়।

§ 2·3. উপপাদ্যের প্রতিপাদন (verification)।

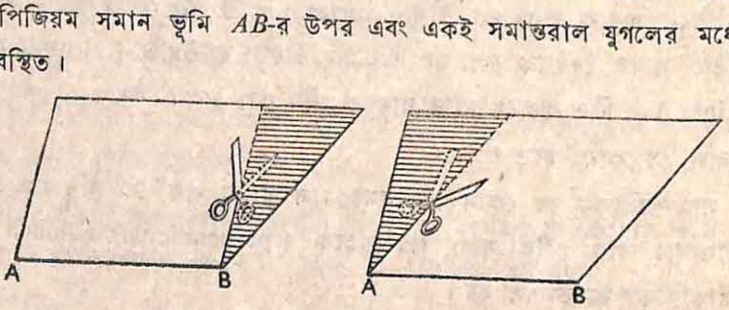
এই অধ্যায়ে ক্ষেত্রফল বিষয়ক কয়েকটি উপপাদ্য প্রতিষ্ঠিত করা হবে। প্রতিটি উপপাদ্যের নিয়মানুগ জ্যামিতিক প্রমাণ (formal proof) দেওয়ার আগে তার সত্যতার সমর্থনে বিভিন্ন ক্রিয়া-কলাপ ও পরীক্ষা-নিরীক্ষা সন্নিবেশিত হবে। এই পরীক্ষার ফল উপপাদ্যের সত্যতা সম্বন্ধে আস্থা জন্মাতে সহায়ক হবে মাত্র। এই পরীক্ষাকে জ্যামিতিক প্রমাণ মনে করলে ভুল করা হবে। পরীক্ষা-নির্ভর প্রমাণ প্রতিপাদন —জ্যামিতিক প্রমাণ নয়। পরীক্ষা দ্বারা সমর্থিত সত্য প্রতিপাদিত (verified) সত্য, যথাযথ জ্যামিতিক প্রমাণ সহযোগে প্রতিষ্ঠিত সত্য উপপাদ্য। উপপাদ্যের প্রমাণে পরীক্ষা-অংশ সংযোজিত না হলে প্রমাণ কোন অংশে অশক্ত বা দুর্বল হয় না।

§ 2·4. উপপাদ্য 6

একই ভূমির উপর (বা সমান সমান ভূমির উপর) দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত (বা সমান উচ্চতা-বিশিষ্ট) সামান্তরিক সমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

প্রতিপাদন (verification)।

দু টুকরা কাগজ নাও (একটু পুরু হলে কাজের সুবিধা হয়, যেমন দুটো পুরানো পোস্টকার্ড)। এদের একটিতে যে কোন একটি ট্রাপিজিয়ম আঁক। এই কাগজটি অন্য কাগজটির উপর বসাও। তারপর এক কাঁচিতে দুটো কাগজ থেকেই দুটো ট্রাপিজিয়ম কেটে নাও। এদের ক্ষেত্রফল অবশ্যই সমান। এদের সমান্তরাল বাহু দুটোর ছোটটি ধরা যাক AB। উভয় ট্রাপিজিয়ম সমান ভূমি AB-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।



এখন উপরের ট্রাপিজিয়মে B বিন্দু দিয়ে সোজা কাঁচি চালিয়ে ট্রাপিজিয়মটিকে একটি সামান্তরিক ও একটি ত্রিভুজে ভাগ কর। নিচের ট্রাপিজিয়মে A বিন্দু দিয়ে সোজা কাঁচি চালিয়ে এই ট্রাপিজিয়মটিকেও একটি সামান্তরিক ও একটি ত্রিভুজে ভাগ কর। প্রথমেই যে দুটো ট্রাপিজিয়ম নেওয়া হয়েছে তা সম্পূর্ণ ইচ্ছাধীন। সুতরাং ত্রিভুজাকার কাগজ ছেঁটে ফেলে যে সামান্তরিক তৈরি করা হচ্ছে তাদের আকারগুলোও পরীক্ষকের ইচ্ছাধীন। অর্থাৎ উৎপন্ন সামান্তরিক দুটো যে কোন দুই ভিন্ন সামান্তরিক। এরা কিন্তু একই ভূমি AB-র উপর অবস্থিত। তাদের আগের অবস্থান কল্পনা করে বলা যায়, তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যেও অবস্থিত। কিংবা কাগজ দুটোকে আলাদা করে নিয়ে বলতে পারা যায়, এরা সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট।

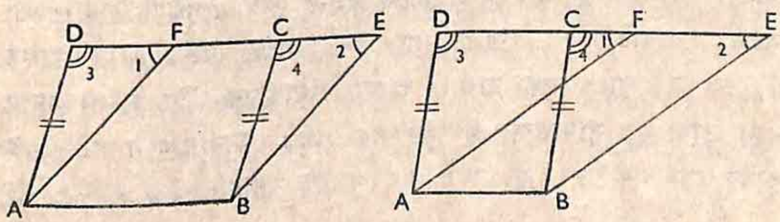
এখন উপরের কাগজ কেটে পাওয়া ত্রিভুজ আর নিচের থেকে পাওয়া ত্রিভুজ দুটি যথাযথভাবে উপরে উপরে বসালে দেখা যাবে তারা সর্বতোভাবে সমান। সুতরাং তাদের ক্ষেত্রফলও সমান। সমান সমান ট্রাপিজিয়ম থেকে সমান সমান ত্রিভুজ ছেঁটে দিয়ে যে সামান্তরিক দুটো পাওয়া গেছে তারাও অবশ্যই সমান।

এখানেই পরীক্ষা-কার্য সম্পূর্ণ হল। পরীক্ষার ফল উপপাদ্যটিকে সমর্থন করছে। অর্থাৎ উপপাদ্যটি প্রতিপাদিত হল।

প্রমাণ (proof)।

প্রথম ধাপ।

ধরা যাক $ABCD$ ও $ABEF$ যে কোন দুটি সামান্তরিক একই ভূমি AB এবং একই সমান্তরাল যুগল AB ও DE-র মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে, সামান্তরিক দুটির ক্ষেত্রফল সমান। আরও প্রমাণ করতে হবে যে, একই ভূমি AB-র উপর না হয়ে সমান সমান ভূমি AB ও $A'B'$ এর উপর অবস্থিত ও সমান উচ্চতা-বিশিষ্ট যে কোন দুটি সামান্তরিক $ABCD$ ও $A'B'EF$ এর ক্ষেত্রফলও সমান।



দ্বিতীয় ধাপ।

প্রমাণের এই ধাপে একই ভূমির উপর অবস্থিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রে প্রমাণ দেওয়া হবে। পরের ধাপে এই প্রমাণ সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত সামান্তরিকের ক্ষেত্র পর্যন্ত প্রসারিত করা হবে।

$\triangle BEC$ ও $\triangle AFD$ ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$BC=AD$, কারণ এরা $ABCD$ সামান্তরিকের দুই বিপরীত বাহু ;

$\angle 2=$অনুরূপ $\angle 1$, কারণ $AF \parallel BE$;

$\angle 4=$অনুরূপ $\angle 3$, কারণ $AD \parallel BC$।

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। অতএব তাদের ক্ষেত্রফল সমান। তাহলে সমগ্র ট্রাপিজিয়ম $ABED$ থেকে এই দুটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজের যে কোণটি বাদ দিলে একই ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ক্ষেত্র পাওয়া যাবে। এই ক্ষেত্রগুলিই $ABCD$ ও $ABEF$ দুটি সামান্তরিক। তাহলে এদের ক্ষেত্রফল সমান। সংক্ষেপে,

ট্রাপিজিয়ম $ABED-\triangle BEC=$একই ট্রাপিজিয়ম $ABED-\triangle AFD$,

$\therefore$ সামান্তরিক $ABCD=$সামান্তরিক $ABEF$।

তাহলে এই প্রতিষ্ঠিত হল যে, একই ভূমির উপর ও একই সমান্তরাল সরলরেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।

তৃতীয় ধাপ।

এই ধাপে দেখান হবে যে, সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত সমান উচ্চতা-বিশিষ্ট সামান্তরিক সমূহের ক্ষেত্রফলও সমান। $ABCD$ ও $A'B'EF$ সামান্তরিক দুটির ভূমি AB ও $A'B'$ সমান। দ্বিতীয় সামান্তরিকের ভূমি $A'B'$ কে প্রথম সামান্তরিকের সমান ভূমি AB-র উপর সংস্থাপন করা যাক। $AB=A'B'$, অতএব $A'B'$ কে AB-র সঙ্গে সম্পূর্ণ মিলিয়ে দেওয়া সম্ভব। আবার AB রেখার যে পাশে DC আছে, দ্বিতীয় সামান্তরিকের FE-কে সেই পাশে ফেলা যাক। তাহলে সামান্তরিক দুটির উচ্চতা সমান বলে তারা এক সামান্তরাল যুগলের মধ্যে হবে। আবার এখন তারা একই ভূমির উপর অবস্থিত। সুতরাং তাদের ক্ষেত্রফল সমান।

অনুসিদ্ধান্ত। সমান সমান ভূমির উপর দণ্ডায়মান সমান সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সামান্তরিকের উচ্চতা সমান।

[পরে উপপাদ্য 9 যে পদ্ধতিতে প্রমাণ করা হয়েছে এই অনুসিদ্ধান্তটিও সেই পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায়।]

§ 2·5. উপপাদ্য 7

একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

প্রতিপাদন।

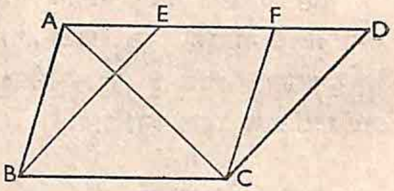
এক টুকরা কাগজে (একটু পুরু) দুটি সমান্তরাল সরলরেখা *BC* ও *AD* টান। তারপর *ABCF* ও *BCDE* দুটি যে কোন সামান্তরিক আঁক। এরা একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক। § 2·4 এর পরীক্ষা অনুসারে এদের ক্ষেত্রফল সমান।

এরপর কাগজ থেকে *ABCF* সামান্তরিক কেটে নাও। এই সামান্তরিকের *CA* কর্ণ-বরাবর কাঁচি চালিয়ে তাকে দুটি ত্রিভুজে ভাগ কর। একটি হবে *ABC* ত্রিভুজ। অপরটি হবে *CFA* ত্রিভুজ। এই ত্রিভুজাকার কাগজ দুটি উপরে উপরে এমনভাবে বসাও যেন *BC*-বরাবর *FA* পড়ে এবং *AB*-বরাবর *CF* পড়ে। এভাবে বসালে দেখা যাবে ত্রিভুজ দুটি সর্বতোভাবে মিলে যাচ্ছে। অতএব এদের ক্ষেত্রফলও সমান। তাহলে এদের যে কোনটি, বিশেষ করে *ABC* ত্রিভুজ, সমগ্র *ABCF* সামান্তরিকের অর্ধেক। কিন্তু *ABCF* সামান্তরিক *BCDE* সামান্তরিকের সমান। অতএব *ABC* ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল *BCDE* সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

প্রমান। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক *ABC* একটি ত্রিভুজ এবং *BCDE* একটি সামান্তরিক একই ভূমি *BC*-র উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগল *BC* ও *ED*-র মধ্যে অবস্থিত। এই শেষ অংশের অর্থ এই যে, *A* বিন্দু *DE* সরলরেখার উপর অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে *ABC* ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল *BCDE* সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

দ্বিতীয় ধাপ। অঙ্কন।



C বিন্দুর ভিতর দিয়ে BA-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা CF টানা যাক। ধরা যাক এ রেখা AD কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

তৃতীয় ধাপ।

যেহেতু $AD \parallel BC$, অতএব $AF \parallel BC$। আবার $CF \parallel BA$। অতএব $BCFA$ একটি সামান্তরিক। তাহলে $BCDE$ ও $BCFA$ সামান্তরিক দুটো একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। অতএব এই সামান্তরিক দুটির ক্ষেত্রফল সমান।

এখন $BCFA$ সামান্তরিকের AC একটি কর্ণ। অতএব AC সামান্তরিক-টিকে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে। অতএব $\triangle ABC$ ও $\triangle CFA$ ত্রিভুজ দুটির একটিকে অপরটির উপর সংস্থাপন করলে তারা সর্বতোভাবে সমান হবে। অতএব তাদের ক্ষেত্রফল সমান।

$\therefore \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} \times$ সামান্তরিক $BCFA$

$= \frac{1}{2} \times$ সামান্তরিক $BCDE$।

অনুসিদ্ধান্ত। সমান সমান ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই উচ্চতা-বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

§ 2·6. উপপাদ্য 8

একই ভূমির উপর (বা সমান সমান ভূমির উপর) দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত (বা একই উচ্চতা বিশিষ্ট) ত্রিভুজ সমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

প্রতিপাদন।

এক টুকরা কাগজে একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও AD-র মধ্যে অবস্থিত ABC ও DBC দুটি ত্রিভুজ আঁক। তারপর BA-র সমান্তরাল CE ও BD-র সমান্তরাল CF টান। ধরা যাক ওরা AD-কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করল। এরপর এই কাগজটি অন্য একটি কাগজে বসিয়ে B, C, F, E, D ও A বিন্দুতে আলপিন দিয়ে চাপ দিলে ঐ বিন্দুগুলির দাগ নিচের কাগজে পাওয়া যাবে। বিন্দুগুলো ভালভাবে

দাগ দিতে হবে। যেন পরে না হারিয়ে যায়। তারপর কাগজ দুটি থেকে *BCFA* ট্রাপিজিয়ম কেটে নাও। নিচের কাগজের ট্রাপিজিয়ম উপরের কাগজের ট্রাপিজিয়মের প্রতিরূপ। অতএব ট্রাপিজিয়ম দুটি সর্বতোভাবে এবং বিশেষ করে ক্ষেত্রফলে সমান। এরপর উপরের কাগজের ট্রাপিজিয়ম থেকে *CFE* ত্রিভুজ এবং নিচের ট্রাপিজিয়ম থেকে *BDA* ত্রিভুজ কাঁচি দিয়ে ছেঁটে দাও। এই ছেঁটে ফেলা ত্রিভুজাকার কাগজ টুকরাগুলো যথাযথভাবে উপরে উপরে বসিয়ে দেখা যাবে এরা সর্বতোভাবে সমান। তাহলে উপরের কাগজে যে *ABCE* সামান্তরিক থাকবে এবং নিচের কাগজে যে *DBCF* সামান্তরিক থাকবে এদের ক্ষেত্রফল সমান। এবারে উপরের কাগজের সামান্তরিকটিকে *AC* কর্ণ-বরাবর কাট এবং নিচেরটিকে *DC* কর্ণ-বরাবর কাট। দেখা যাবে উপরের সামান্তরিক থেকে পাওয়া দুটি ত্রিভুজ সর্বতোভাবে সমান এবং নিচের থেকে পাওয়া দুটি ত্রিভুজও নিজেরা সর্বতোভাবে সমান। অতএব উপরের *ABC* ত্রিভুজ এবং নিচের *DBC* ত্রিভুজ যথাক্রমে উপরের ও নিচের সমান সামান্তরিকগুলির অর্ধেক। অতএব তারা নিজেরা সমান। তাহলে উপরের পরীক্ষায় দেখা গেল যে, একই ভূমির উপর বা সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত বা সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান।

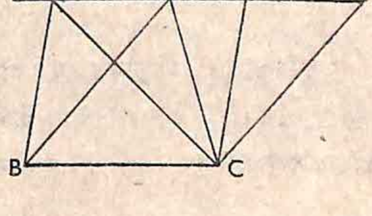
প্রমাণ।

প্রথম ধাপ।

ধরা যাক *ABC* ও *DBC* ত্রিভুজ দুটি একই ভূমি *BC*-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল *BC* ও *AD*-র মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফল সমান। একই ভূমি না হয়ে সমান সমান ভূমি *BC* ও *B'C'*-র উপর দণ্ডায়মান এবং সমান উচ্চতা বিশিষ্ট যে কোন দুটি ত্রিভুজ *ABC* ও *D'B'C'*-এর ক্ষেত্রফলও সমান প্রমাণ করতে হবে।

দ্বিতীয় ধাপ। অঙ্কন।

C-র ভিতর দিয়ে *BA*-র সমান্তরাল *CE* এবং *BD*-র সমান্তরাল *CF* টানা যাক। ওরা ধরা যাক *AD* কে *E* ও *F* বিন্দুতে ছেদ করে।



তৃতীয় ধাপ।

অঙ্কন অনুসারে *BCEA* ও *BCFD* দুটি সামান্তরিক এবং *AE, DF* একই সমান্তরাল সরলরেখা *AD*-র উপর অবস্থিত। অতএব একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত *ABCE* ও *DBCF* সামান্তরিক দুটি সমান।

AC ও *DC* এই সামান্তরিক দুটির কর্ণ। অতএব এই কর্ণগুলি নিজ নিজ সামান্তরিককে দুটি করে সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে। অতএব *ABC* ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল *ABCE* সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক এবং *DBC* ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল *DBCF* সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। কিন্তু এই সামান্তরিক দুটির ক্ষেত্রফল সমান। অতএব তাদের অর্ধেক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ দুটির ক্ষেত্রফলও সমান। এতে প্রমাণিত হল যে একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

চতুর্থ ধাপ।

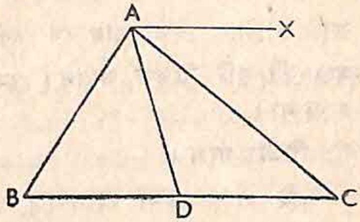
এখন প্রমাণ করা হবে যে, সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত একই উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজ সমূহের ক্ষেত্রফল সমান। *ABC* ও *D'B'C'* এরূপ দুটি ত্রিভুজ হলে দ্বিতীয়টির *B'C'* বাহুকে প্রথম ত্রিভুজটির সমান দীর্ঘ *BC* বাহুর উপর সংস্থাপন করা যায়। তারপর *D'B'C'* ত্রিভুজটিকে *ABC* ত্রিভুজের তলে শুইয়ে উভয় ত্রিভুজকে *BC*-র একই পার্শ্বে ফেলা যায়। *D'* বিন্দু যে বিন্দুতে পড়ে তাকে *D* বলা যাক। যেহেতু ত্রিভুজ দুটি সমান উচ্চতার ছিল অতএব *D* ও *A*, *BC* থেকে সমদূরবর্তী। অতএব *DA*, *BC*-র সমান্তরাল। তাহলে এই *DBC* ত্রিভুজ পূর্বের (তৃতীয় ধাপের) *DBC* ত্রিভুজের সঙ্গে তুলনীয়। কিন্তু *DBC* ও *ABC* সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজ বলে দেখা গেছে। অতএব *D'B'C'* ও *ABC* ত্রিভুজ দুটিও সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট।

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের যে কোন মধ্যমা ত্রিভুজটিকে দুটি সমান ত্রিভুজে বিভক্ত করে। [ত্রিভুজের কোন শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাকে একটি মধ্যমা (median) বলা হয়।]

প্রমাণ।

প্রথম ধাপ।

ধরা যাক ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ এবং AD তার যে কোন একটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, ABD ও ADC ত্রিভুজ দুটি সমান।



দ্বিতীয় ধাপ। অঙ্কন।

A বিন্দু দিয়ে BC-র সমান্তরাল AX টানা যাক।

তৃতীয় ধাপ।

যেহেতু $BD=DC$, অতএব ABD ও ADC ত্রিভুজ দুটি সমান সমান ভূমি BD ও DC-র উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও AX-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \quad \triangle ABD = \triangle ADC$।

§ 2·7. উপপাদ্য 9

একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

প্রতিপাদন।

উপপাদ্যটি দুটি ভিন্ন প্রণালীতে প্রতিপাদন করা হচ্ছে। এরা একে অন্যের বিকল্প। এ দুটি প্রণালীর একটির পরীক্ষা প্রত্যক্ষ, অন্যটির পরোক্ষ। এখানে প্রত্যক্ষ পরীক্ষাটি অপেক্ষাকৃত কষ্টকর। তাই এটি পরে দেওয়া হচ্ছে। কিন্তু যত কষ্টকরই হোক, প্রত্যক্ষ পরীক্ষা অবশ্যই অধিক বাঞ্ছনীয়।

পরোক্ষ পরীক্ষা।

এখানে এই দেখালেই চলবে যে একই ভূমির উপর দুটি ত্রিভুজ সমান হলে তারা কোন অসমান্তরাল যুগলের মধ্যবর্তী হবে না। অর্থাৎ এই দেখাতে হচ্ছে যে, একই ভূমির উপর দুটি ত্রিভুজ (i) অসমান্তরাল যুগলের মধ্যবর্তী হলে অসমান এবং (ii) সমান্তরাল যুগলের মধ্যবর্তী হলে অসমান নয় বা সমান।

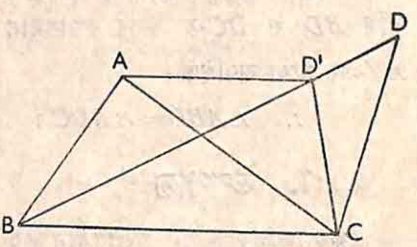
প্রথম ধাপ।

§ 2·6 উপপাদ্য 8 এর প্রতিপাদনে যেভাবে বলা হয়েছে সেভাবে পরীক্ষা-কার্য চালিয়ে দেখা যায় যে একই ভূমির উপর একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যবর্তী দুটি ত্রিভুজ সমান। সে পরীক্ষার আর এখানে পুনরুল্লেখ করা হচ্ছে না।

দ্বিতীয় ধাপ।

এই ধাপে দেখা যাবে যে, একই ভূমির উপর যে কোন অসমান্তরাল যুগলের মধ্যবর্তী দুটি ত্রিভুজ অসমান (*i*)।

এজন্য একটি কাগজের উপর যে কোন দুটি সমান্তরাল সরলরেখা BC ও AD' টান। [একাজ জ্যামিতি বাক্সের সাহায্য ছাড়াও করা যায়। § 2·14, 2 দ্রষ্টব্য।] BD' কে D পর্যন্ত বাড়িয়ে দাও। তাহলে ABC ও DBC একই ভূমির উপর কিন্তু অসমান্তরাল যুগলের মধ্যবর্তী দুটি ত্রিভুজ। এবার $D'DC$ ত্রিভুজটি কাঁচি দিয়ে কেটে সরিয়ে নাও। তাহলে DBC ত্রিভুজের অংশ $D'BC$ ত্রিভুজ পড়ে থাকবে। প্রথম ধাপে



প্রাপ্ত ফল থেকে বুঝা যাচ্ছে ABC ও $D'BC$ সমান। তাহলে $\triangle ABC$ এর চেয়ে $\triangle DBC$ কেটে নেওয়া ত্রিভুজটির সম পরিমান বড় ছিল। অতএব $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$ অসমান।

প্রথম ও দ্বিতীয় ধাপের মিলিত ফল থেকে উপপাদ্যটি প্রতিপাদিত হচ্ছে।

প্রত্যক্ষ পরীক্ষা (বিকল্প প্রতিপাদন)।

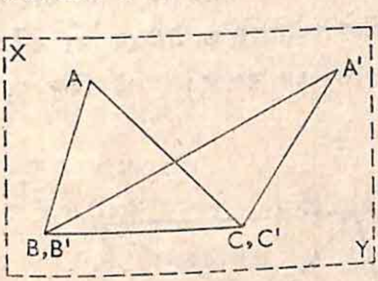
প্রথম ধাপ।

প্রত্যক্ষ পরীক্ষার সাহায্যে প্রতিপাদনের জন্য প্রথমে সমান ভূমির উপর দুটি সমান ত্রিভুজ তৈরি করতে হবে। এটি শক্ত কাজ। সর্বত্র সমান পুরু এরকম কোন পাত থেকে সমান সমান ভূমির উপর যে কোন দুটি ত্রিভুজাকার অংশ কেটে নাও। এদের মধ্যে যেটির ওজন বেশী হবে সেটির একটি ধার (edge) ফাইল (file, উখা) দিয়ে এমনভাবে ঘসতে থাক যেন ভূমি না ঘসা হয়ে যায় বা না কমে যায়। মাঝে মাঝে ওজনও নিতে থাক। এর ওজন যখন অন্য ত্রিভুজটির ওজনের সমান হবে তখন বুঝতে হবে ত্রিভুজ দুটি

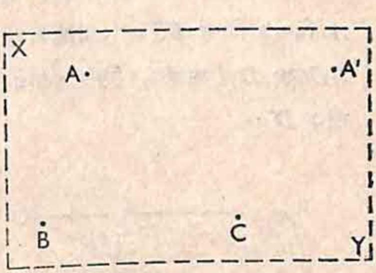
সমান হয়েছে*। এভাবে সমান ভূমির উপর দুটি সমান ত্রিভুজ তৈরি হল। [এ প্রসঙ্গে § 2·14, 2 এ তৈরি দুটি বিশেষ ত্রিভুজ উল্লেখযোগ্য।]

দ্বিতীয় ধাপ।

প্রথম ধাপে প্রাপ্ত ত্রিভুজ দুটি ধর ABC ও $A'B'C'$ যাদের $BC = B'C'$। এদেরকে-চিত্র প্রদর্শিত (চিত্র-1) উপায়ে একটি বড় কাগজ XY-র উপর বসাও। তারপর A, A', B (বা B'), C (বা C') বিন্দুগুলিতে আলপিন চেপে এদের ছাপ নিচের XY-কাগজে নাও (চিত্র-2)। এবার XY থেকে পাতগুলো সরিয়ে দাও। এখন পরীক্ষা করে দেখতে হবে XY-র গায়ে আঁকা AA' ও BC সমান্তরাল কিনা।



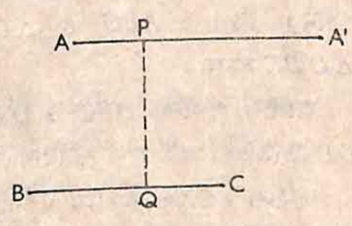
চিত্র-1



চিত্র-2

তৃতীয় ধাপ।

XY-কাগজটি AA'-বরাবর এমাথা ওমাথা এবং BC-বরাবর এমাথা ওমাথা কেটে ফেল বা ভাঁজ কর। AA' ও BC এখন কাগজটির দুটি ধার (edge) হল। এই কাগজটিকে আড়াআড়ি (চিত্র-3 এ PQ-বরাবর) এমনভাবে ভাঁজ কর যেন BC-রেখা ভাঁজ হয়ে নিজের উপরেই পড়ে। এ ভাবে ভাঁজ করে দেখা যাবে যে যুগপৎ AA'-রেখাও ভাঁজ হয়ে নিজের উপর পড়েছে। এতে বুঝা যাচ্ছে যে AA' ও BC সমান্তরাল।



এখানেই পরীক্ষা সম্পূর্ণ হল। পরীক্ষার ফল উপপাদ্যটিকে সমর্থন করে।

[এই ধাপে দুটি সরলরেখা সমান্তরাল কিনা তার পরীক্ষা ত্রিকোণীর (set-squares) সাহায্যেও করা যায়।]

* এখানে অজ্ঞাতসারে ঘন জ্যামিতির প্রিজমের আয়তনের সূত্র কাজ করছে।

প্রমাণ।

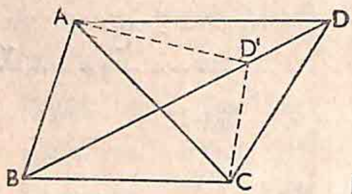
প্রথম ধাপ।

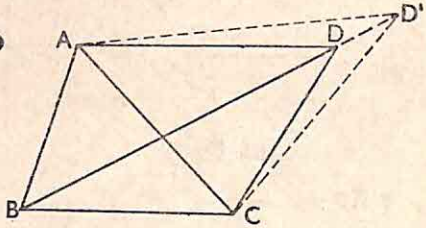
ধরা যাক ABC ও DBC দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট যে কোন ত্রিভুজ একই ভূমি BC-র উপর দণ্ডায়মান এবং BC-র একই পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে

$$AD \parallel BC$$

দ্বিতীয় ধাপ।

যদি সম্ভব হয় তবে ধরা যাক AD ও BC সমান্তরাল নয়। তাহলে A বিন্দু দিয়ে BC-র সমান্তরাল সরলরেখা আঁকলে তা BD কে বা বর্ধিত BDকে D (ও B) ভিন্ন কোন বিন্দুতে ছেদ করবে। এই বিন্দু ধরা যাক D'।





তৃতীয় ধাপ।

ABC ও $D'BC$ ত্রিভুজ দুটি একই ভূমি BC-র উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও AD' এর মধ্যে অবস্থিত। অতএব তারা সমান। কিন্তু $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$ ও সমান। অতএব $\triangle DBC$ ও $\triangle D'BC$ সমান।

আবার স্পষ্টতঃ DBC ও $D'BC$ ত্রিভুজ দুটির একটি অপরটি অপেক্ষা $DD'C$ ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র পরিমাণ বেশী। অতএব তারা সমান নয়।

তাহলে এই দুই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যাচ্ছে যে $\triangle DBC$ ও $\triangle D'BC$ ত্রিভুজ দুটি সমান অথচ অসমান। কিন্তু এরূপ হওয়া (দুটি সমান জিনিষ অসমান) অসম্ভব। এই পরস্পর বিরোধী অসম্ভব সিদ্ধান্তের মূলে রয়েছে AD ও BC অসমান্তরাল ধরে নেওয়া (দ্বিতীয় ধাপ)। অতএব

$$AD \parallel BC.$$

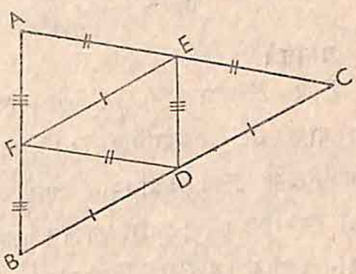
এখানে উপপাদ্যটির প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

অনুসিদ্ধান্ত। সমান সমান ভূমির উপর দণ্ডায়মান সমান সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ সমূহের ভূমিগুলি একই সরলরেখায় হলে এবং ত্রিভুজগুলি ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত হলে শীর্ষগুলি ভূমির সমান্তরাল একটি সরলরেখার উপর থাকে।

§ 3·8. উদাহরণমালা

উদাহরণ I. কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা সমগ্র ত্রিভুজ থেকে যে ক্ষুদ্রতর একটি ত্রিভুজ ছিন্ন করে তা সমগ্র ত্রিভুজের এক-চতুর্থাংশ—

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।



ধরা যাক ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ এবং এর যে কোন দুটি বাহু AB ও AC-র মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E। প্রমাণ করতে হবে যে AFE ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমগ্র ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের এক-চতুর্থাংশ।

দ্বিতীয় ধাপ। অঙ্কন।

BC-র মধ্যবিন্দু D-র সাথে E ও F যুক্ত করা যাক।

তৃতীয় ধাপ।

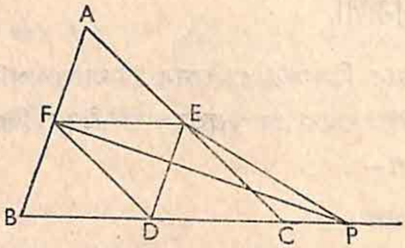
এই অঙ্কণের ফলে সমগ্র ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে চারটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হল। এরা সবাই সর্বসম। এদের সর্বসমতা খুব সহজে প্রমাণ করা যায়। যেমন, উদাহরণস্বরূপ, AFE ও DEF ত্রিভুজ দুটির সর্বসমতা প্রমাণ করা যাক। DE, ABC ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা বলে FA-র সমান্তরাল। অনুরূপ কারণে DF, EA-র সমান্তরাল। অতএব $AFDE$ একটি সামান্তরিক। FE এর একটি কর্ণ একে AFE ও DEF দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করবে।

$$\therefore \quad \triangle AFE \equiv \triangle DEF।$$

এভাবে চারটি ত্রিভুজের সর্বসমতা প্রমাণ করা যায়।

তারপর উপরিপাতনের সাহায্যে বলা যায় যে এরা একই ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট। অতএব প্রত্যেকে, বিশেষ করে $\triangle AFE$, সমগ্র ABC ত্রিভুজের এক-চতুর্থাংশ। এইখানে প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

উদাহরণ 2. ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E; BC বা তার বর্ধিতাংশের উপর P যে কোন একটি বিন্দু। দেখাও যে, EPF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের এক-চতুর্থাংশ।



প্রমাণ।

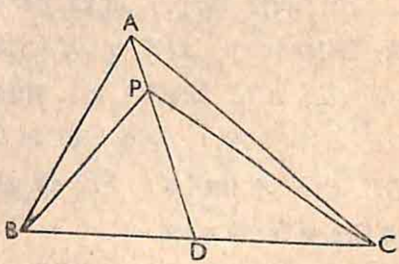
E ও F যথাক্রমে AC ও AB-র মধ্যবিন্দু। অতএব $FE \parallel BC$। ধরা যাক BC-র মধ্যবিন্দু D। তাহলে EDF ও EPF ত্রিভুজ দুটি একই ভূমি FE-র উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগল FE ও BC-র মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং তাদের ক্ষেত্রফল সমান। কিন্তু উদাহরণ 1-তে দেখান হয়েছে যে EDF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমগ্র ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের এক-চতুর্থাংশ। অতএব EPF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলও তাই।

দ্রষ্টব্য। EPF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল একটি ধ্রুবক (অপরিবর্তনীয়)।

উদাহরণ 3. দেখাও যে, ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমার উপর P যে কোন বিন্দু হলে PAB ও PAC ত্রিভুজ দুটি সমান।

প্রমাণ।

ABC ত্রিভুজের AD এবং PBC ত্রিভুজের PD মধ্যমা। অতএব § 3·6 অনুসিদ্ধান্ত থেকে দেখা যায় যে [এখানে ছাত্র-ছাত্রীরা তা প্রমাণ করে দেখাবে]



$$\triangle ABD = \triangle ADC$$

এবং $\triangle PBD = \triangle PDC$।

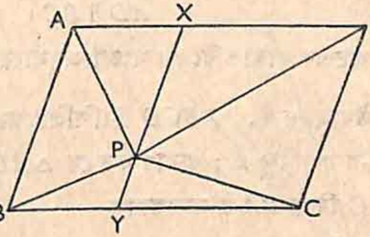
অতএব বিয়োগ করে,

$\triangle PAB = \triangle PAC$; (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4. $ABCD$ একটি সামান্তরিক। তার অভ্যন্তরে P যে কোন একটি বিন্দু। দেখাও যে, $\triangle PAB$ ও $\triangle PCD$-এর সমষ্টি সামান্তরিকটির অর্ধেক।

প্রমাণ।

প্রথম ধাপ। অঙ্কণ।



P বিন্দু দিয়ে AB-র সমান্তরাল XY সরলরেখা টানা যাক। ধরা যাক এ রেখা AD ও BCকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে।

দ্বিতীয় ধাপ।

অঙ্কন অনুসারে $ABYX$ একটি সামান্তরিক। $\triangle PAB$ ও $\square ABYX$ একই ভূমি AB-র উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগল AB ও PY এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \quad \triangle PAB = \frac{1}{2} \times \square ABYX$।

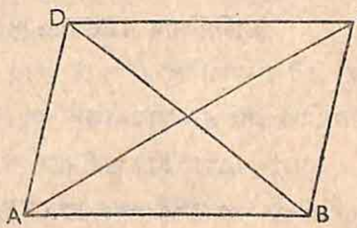
অনুরূপে $\triangle PCD = \frac{1}{2} \times \square CDXY$।

এদের যোগ করে পাওয়া যায়

$\triangle PAB + \triangle PCD = \frac{1}{2} \times \square ABCD$। (প্রমাণিত)

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর যে কোন চতুর্ভূজ যদি তার প্রত্যেকটি কর্ণ দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয় তবে ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।



ধরা যাক $ABCD$ একটি যে কোন চতুর্ভুজ যার কর্ণ দুটোর প্রত্যেকে একে সমদ্বিখণ্ডিত করে। দেখাতে হবে যে ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক।

দ্বিতীয় ধাপ।

কোন না কোন কর্ণ দ্বারা ছিন্ন ABC ও ABD ত্রিভুজ দুটির প্রত্যেকে চতুর্ভুজটির অর্ধেক। অতএব এরা সমান। কিন্তু এরা একই ভূমি BC-র উপর একই পার্শ্বে দণ্ডায়মান। অতএব এরা অবশ্যই একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং

$$DC \parallel AB \text{।}$$

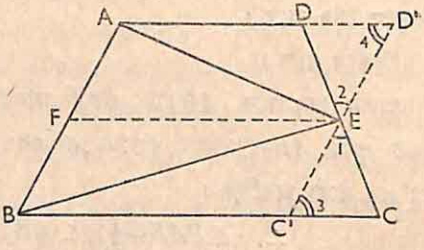
অনুরূপ যুক্তিতে

$$AD \parallel BC \text{।}$$

অতএব সামান্তরিকের সংজ্ঞা অনুসারে $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

উদাহরণ 6. $ABCD$ ট্রাপিজিয়মের একটি তির্যক (oblique) বাহু CD-র মধ্যবিন্দু E ; প্রমাণ কর যে $\triangle AEB$ সমগ্র ট্রাপিজিয়মের অর্ধেক।

E দিয়ে BA-র সমান্তরাল $C'D'$ আঁক। এই সমান্তরাল রেখা BC ও AD বা তাদের বর্ধিতাংশকে ধরা যাক যথাক্রমে C' ও D' বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে $ABC'D'$ একটি সামান্তরিক।



এখন $CC'E$ ও $DD'E$ ত্রিভুজ দুটিতে

$\angle 1 =$ বিপ্রতীপ $\angle 2$,

$\angle 3 =$ একান্তর $\angle 4$,

$CE = DE$ [যেহেতু E, CD-র মধ্যবিন্দু]।

$\therefore \quad \triangle CC'E \equiv \triangle DD'E$

$\therefore$ ট্র্যাপিজিয়ম $ABCD = \square ABC'D' \qquad (1)$

এখন AB-র মধ্যবিন্দু F ও E যোগ করা যাক। স্পষ্টতঃ $AFED'$ একটি সামান্তরিক এবং AE তার একটি কর্ণ।

$\therefore \quad \triangle AFE \equiv \triangle EAD'$

$\therefore \quad \triangle AFE = \frac{1}{2} \times \square AFED' \qquad (2)$

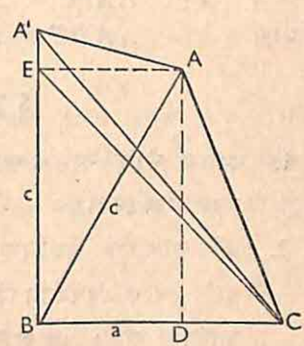
অনুরূপে, $\quad \triangle BFE = \frac{1}{2} \times \square BC'EF \qquad (3)$

(2) ও (3) থেকে দেখা যাচ্ছে [যোগ করে] যে,

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \times \square ABC'D'$$
$$= \frac{1}{2} \times \text{ট্র্যাপিজিয়ম } ABCD \quad [\ (1) \text{ এর সাহায্যে }]$$

উদাহরণ 7. কোন ত্রিভুজের দুটো বাহু নির্দিষ্ট থাকলে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ যখন সমকোণ হয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল তখনই সবচেয়ে বেশী হয়।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।



ধরা যাক ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য a ও c বলে নির্দিষ্ট করা আছে। এরকম দুটি ত্রিভুজ নেওয়া যাক ABC ও $A'BC$ যেখানে $BC=a$ এবং $AB=c=A'B$। এদের মধ্যে ধরা যাক ABC এরূপ যে কোন ত্রিভুজ যাতে AB ও BC মধ্যবর্তী কোণ সমকোণ ভিন্ন অন্য কোন মাপের হতে পারে। কিন্তু $A'BC$ এরূপ একটি বিশেষ ত্রিভুজ যাতে $A'B$ ও BC-র মধ্যের কোণ সমকোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে

$$\triangle A'BC > \triangle ABC \text{।}$$

দ্বিতীয় ধাপ।

BC-র উপর বা বর্ধিত BC-র উপর AD লম্ব আঁক।

BAA' ত্রিভুজের $BA=BA'=c$। অতএব ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

$$\because \quad \angle BA'A = \angle BAA'$$
$$\therefore \quad \angle BA'A < \angle DAA' \quad (1)\text{।}$$

আবার CA' ও DA সমান্তরাল এবং AA' তাদের ভেদক। অতএব

$$\angle BA'A + \angle DAA' = 2 \text{ সমকোন।}$$

অতএব (1) থেকে দেখা যাচ্ছে যে

$$\angle BA'A < 1 \text{ সমকোণ এবং } \angle DA'A > 1 \text{ সমকোণ।}$$

তাহলে $BDAEB$ আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ করলে E বিন্দু BA' এর মধ্যে থাকবে— তার বর্ধিতাংশের উপর নয়। কারণ $EA'A$ হবে একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle EA'A$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

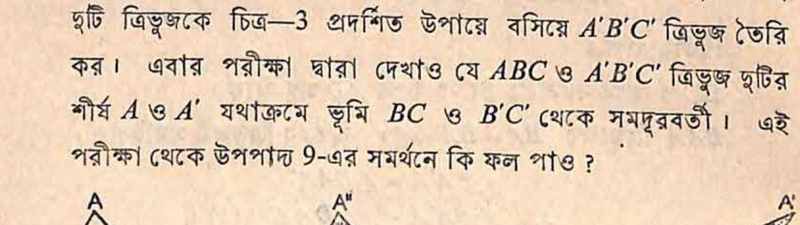
অতএব $A'B > EB$। তাহলে EC যোগ করলে যে EBC ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তা $A'BC$ ত্রিভুজের একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ মাত্র। অতএব তা $A'BC$ ত্রিভুজ অপেক্ষা ছোট। আবার EBC ও ABC ত্রিভুজ দুটি একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও EA-র মধ্যে অবস্থিত। তাই তারা সমান। তাহলে ABC ত্রিভুজ এমন একটি ত্রিভুজের সমান ($= \triangle EBC$) যা $A'BC$ ত্রিভুজ অপেক্ষা ছোট। অতএব

$$\triangle ABC < \triangle A'BC,$$

বা, $$\triangle A'BC > \triangle ABC।$$

§ 2·14 প্রশ্নমালা

1. কাগজ ভাঁজ করে (জ্যামিতির বাক্স ব্যবহার না করে) দুটি সমান্তরাল সরলরেখা দেখাও।
2. দুটি কাগজের একটিকে আর একটির উপর বসাও এবং একই কাঁচিতে দুটো থেকে যে কোন ত্রিভুজাকার কাগজ কেটে নাও। এবার দুটোকে আলাদা কর। যে দুটো ত্রিভুজ পাওয়া গেল ওরা ধর ABC ও $A''B'C'$ যাদের $BC=B'C'$, $CA=C'A''$, $AB=A''B'$। এখন $A''C$ কে ভাঁজ করে এর মধ্যবিন্দু E' চিহ্নিত কর। তারপর $A''B'C'$ ত্রিভুজের $B'E'$ বরাবর কাঁচি চালিয়ে ওকে দুটি ত্রিভুজে ভাগ কর (চিত্র—2)। এই দুটি ত্রিভুজকে চিত্র—3 প্রদর্শিত উপায়ে বসিয়ে $A'B'C'$ ত্রিভুজ তৈরি কর। এবার পরীক্ষা দ্বারা দেখাও যে ABC ও $A'B'C'$ ত্রিভুজ দুটির শীর্ষ A ও A' যথাক্রমে ভূমি BC ও $B'C'$ থেকে সমদূরবর্তী। এই পরীক্ষা থেকে উপপাদ্য 9-এর সমর্থনে কি ফল পাও ?



চিত্র—1 চিত্র—2 চিত্র—3

3. দেখাও যে কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সমূহ পরপর যোগ করে যে সামান্তরিক পাওয়া যায় [§1·12, উদাহরণ 1] তা সমগ্র চতুর্ভুজটির অর্ধেক।

4. প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের শীর্ষ ও ভূমির সমত্রিখণ্ডক বিন্দুগুলোর (points of trisection) সংযোজক রেখা ত্রিভুজটিকে সমত্রিখণ্ডিত করে।
5. কোন ট্রাপিজিয়মের একটি তির্যক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর তির্যক বাহুর সমান্তরাল টেনে একটি সমান্তরাল এবং একটি সমান্তরাল বাহুকে যথেচ্ছ বাড়িয়ে যে সামান্তরিক আঁকা যায় তা ট্রাপিজিয়মটির সমান—প্রতিষ্ঠিত কর।
6. প্রতিষ্ঠিত কর যে একই বাহুবিশিষ্ট রম্বস ও বর্গক্ষেত্রের মধ্যে বর্গক্ষেত্রই বড়।

[সংকেত। $ABC'D'$ বর্গক্ষেত্র ও $ABCD$ রম্বস একই ভূমি AB-র একই পার্শ্বে নাও। ধর AD' ও BC', CD কে Q ও P বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে আয়ত $ABPQ$=রম্বস $ABCD$। কিন্তু আয়ত $ABPQ <$ বর্গক্ষেত্র $ABC'D'$।]

তৃতীয় অধ্যায়

ত্রিভুজ ও কয়েকটি সমবিন্দু সরলরেখা।

§ 3·1. সংজ্ঞা।

কতকগুলি সরলরেখা একটি বিন্দুতে মিলিত হলে সরলরেখাগুলিকে বলা হয় **সমবিন্দু সরলরেখা** (concurrent straight lines)।

ত্রিভুজের কোণ কৌণিক বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাকে বলা হয় **মধ্যমা** (median)।

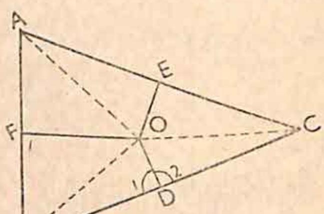
এই অধ্যায়ে ত্রিভুজের সঙ্গে বিশেষ ভাবে সংশ্লিষ্ট কয়েকটি সমবিন্দু সরলরেখার আলোচনা করা হবে।

§ 3·2. **উপপাদ্য 10**

ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুতে তাদের উপর লম্ব আঁকলে সেই লম্ব তিনটি সমবিন্দু সরলরেখা হয়। (বা, ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।)

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক ABC একটি যে কোন ত্রিভুজ এবং D,E,F যথাক্রমে তার BC, CA, AB বাহুর মধ্য বিন্দু। দেখাতে হবে যে BC,CA,ABর উপর যথাক্রমে D,E,F বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বগুলি কোন একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।



এই ধাপে প্রমাণিতব্য বিষয় যেভাবে উপস্থাপিত করা হল শেষ পর্যন্ত এভাবে তা প্রমাণ করা হবে না। পরের ধাপে একে একটি বিকল্প ও ভিন্নতর ভঙ্গীতে প্রতিস্থাপিত করে প্রমাণ করা হবে।

দ্বিতীয় ধাপ।

প্রমাণিতব্য বিষয়ের বিকল্প ভঙ্গীতে রূপদান বা প্রতিস্থাপন—Resetting of the problem।

AB ও AC দুটি ছেদী সরলরেখা। অতএব তাদের যে কোন বিন্দুতে, বিশেষ করে মধ্যবিন্দুতে, তাদের উপর অঙ্কিত লম্ব দুটি ছেদ করবে। ধরা যাক AC-র উপর E বিন্দুতে এবং AB-র উপর F বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব দুটি O বিন্দুতে মিলিত হয়। এখন OD যোগ করে বলা যায় যে, এই OD, BC-র উপর লম্ব হয় প্রমাণ করতে হবে।

তৃতীয় ধাপ।

অঙ্কণ। OA, OB, OC যোগ করা যাক।

চতুর্থ ধাপ।

O বিন্দু AB-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। অতএব অনুরূপ কারণে, $OA=OB$।

$OA=OC$।

$\therefore \quad OB=OC$।

তাহলে OBD ও OCD ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$OB=OC$, (এই মাত্র প্রমাণিত)

$BD=CD$, ($\therefore$ D,BC-র মধ্যবিন্দু)

এবং OD সাধারণ।

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বতোভাবে সমান।

$\therefore \quad \angle 1=\angle 2$।

কিন্তু এরা BC ও OD দ্বারা উৎপন্ন সন্নিহিত কোণ। অতএব এদের প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore \quad OD \perp BC$।

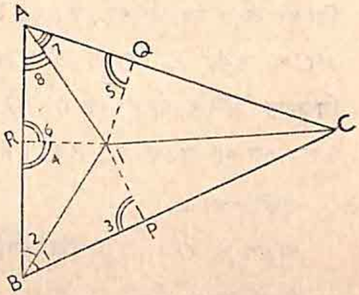
এখানে উপপাদ্যটি প্রতিষ্ঠিত হল।

মন্তব্য। যেহেতু $OA=OB=OC$, অতএব OA ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট O-কেন্দ্রিক বৃত্তটি A, B, C দিয়ে যায়। এই বৃত্তটিকে ABC ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত** (circum-circle) বলা হয় এবং Oকে **পরিকেন্দ্র** (circum-centre) বলা হয়।

§ 3·3. **উপপাদ্য 11.**

ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডক ত্রয় সমবিন্দু।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।



ধর ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ। দেখতে হবে যে A, B ও C কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলো একই বিন্দুতে মিলিত হয়।

এই ধাপে প্রমাণিতব্য বিষয় এক ভাবে উপস্থাপিত করা হল। পরের ধাপে একে একটি বিকল্প ভঙ্গীতে প্রতিস্থাপিত করা হবে এবং শেষ পর্যন্ত তা-ই প্রমাণ করা হবে।

দ্বিতীয় ধাপ। প্রমাণিতব্য বিষয়ের বিকল্প ভঙ্গীতে প্রকাশ।

সমগ্র $\angle B$ ও সমগ্র $\angle C$ কোণের অন্তদ্বিখণ্ডক দ্বয় অবশ্যই ছেদ করে। ধরা যাক তারা I বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে দেখাতে হবে যে AI সরলরেখা সমগ্র $\angle A$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক।

তৃতীয় ধাপ। অঙ্কণ

I বিন্দু থেকে BC, CA, AB উপর যথাক্রমে IP, IQ, IR লম্ব টানা যাক।

চতুর্থ ধাপ।

IBP ও IBQ ত্রিভুজ দুটোর মধ্যে

$\angle 1=\angle 2$, ($\because$ BI, সমগ্র B কোণের সমদ্বিখণ্ডক)

$\angle 3=\angle 4$, ($\because$ অঙ্কন অনুসারে প্রত্যেকে এক সমকোণ)

এবং IB বাহু সাধারণ।

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। সুতরাং

$IP=IR$।

অনুরূপ যুক্তিতে IPC ও IPQ ত্রিভুজ দুটো থেকে পাওয়া যায়

$IP=IQ$।

$IQ=IR$।

এখন অঙ্কন অনুসারে IAQ ও IAR ত্রিভুজ দুটি সমকোণী (কারণ 5 ও 6 প্রত্যেকে এক সমকোণ) এবং এই সমকোণী ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$IQ=IR$ (এই মাত্র প্রমাণিত)

এবং অতিভুজ IA সাধারণ।

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম *। অতএব

$$\angle 7=\angle 8$$

অর্থাৎ AI, সমগ্র $\angle A$ কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক।

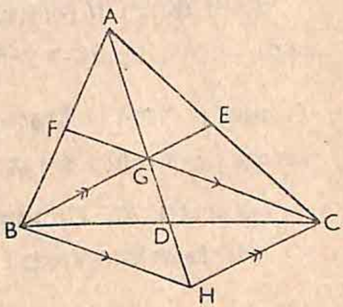
এতে উপপাদ্যটির প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

মন্তব্য। যেহেতু $IP=IQ=IR$, অতএব IP ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট I-কেন্দ্রিক বৃত্তটি P,Q,R দিয়ে যায়। দেখান যায় যে, ত্রিভুজটির সবগুলো বাহুর সঙ্গে মিলিত হয় সবচেয়ে কম ব্যাসার্ধের বৃত্ত এইটিই। ত্রিভুজের অন্তবৃত্তের সংজ্ঞা (এখনও পর্যন্ত তা আলোচনা হয় নি) থেকে দেখান যায় যে এই বৃত্তটিই **অন্তবৃত্ত** (in-circle বা, inscribed circle)। I এই বৃত্তের কেন্দ্র। তাকে বলা হয় অন্তঃকেন্দ্র (in-centre)।

§ 3·4 উপপাদ্য 12

ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।



ধরা যাক ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ। দেখাতে হবে যে এর মধ্যমা তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হয়।

এই ধাপে প্রমাণিতব্য বিষয় যে ভাবে উপস্থাপিত করা হল শেষ পর্যন্ত এভাবে তা প্রমাণ করা হবে না। পরের ধাপে একে একটি সুবিধামত বিকল্প ভঙ্গীতে প্রতিস্থাপিত করা হবে এবং শেষ পর্যন্ত প্রমাণ এই ভাবেই সম্পূর্ণ করা হবে।

---

* দুটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির অতিভুজ ও বাহু অপরটির অতিভুজ ও একটি বাহুর সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। (§0·2 এর শেষে একটি অতিরিক্ত উপপাদ্য দ্রষ্টব্য।

দ্বিতীয় ধাপ। প্রমাণিতব্য বিষয়ের প্রতিস্থাপন।

ধরা যাক AB ও AC-র মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E এবং BE ও CF মধ্যমা দুটি G বিন্দুতে ছেদ করে। AG কে যোগ করে বাড়িয়ে দিলে তা যদি BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে এই দেখালেই উপপাদ্য প্রমাণিত হবে যে D, BC-র মধ্যবিন্দু।

তৃতীয় ধাপ।

B-র ভিতর দিয়ে FC-র সমান্তরাল করে অঙ্কিত BH সরলরেখা ধরা যাক বর্ধিত AD কে H বিন্দুতে ছেদ করে। CH যোগ করা যাক।

চতুর্থ ধাপ।

অঙ্কন অনুসারে ABH ত্রিভুজে F, AB-র মধ্যবিন্দু এবং FG, BH ভূমির সমান্তরাল। অতএব G, AH এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে AHC ত্রিভুজে G, AH এর মধ্যবিন্দু (এইমাত্র প্রমাণিত) এবং E, AC-র মধ্যবিন্দু। অতএব GE, HC ভূমির সমান্তরাল ; অর্থাৎ $BE \parallel HC$.

সুতরাং $BHCGB$ চতুর্ভুজের $BG \parallel HC$ (এইমাত্র প্রমাণিত) এবং $GC \parallel BH$ (অঙ্কন অনুসারে)। অতএব চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

অতএব BC ও GH (সামান্তরিকের দুটি কর্ণ বলে) পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তাহলে D, BC-র মধ্যবিন্দু এবং উপপাদ্যটি প্রতিষ্ঠিত হল।

মন্তব্য। সংজ্ঞা। ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির ছেদ বিন্দুকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (centroid) বলা হয়।

এখানে AD, BE, CF মধ্যমা তিনটি G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। সুতরাং G, ABC ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র।

দ্রষ্টব্য। চতুর্থ ধাপে দেখান হয়েছে যে G, AH এর মধ্যবিন্দু।

$$\therefore \quad AG = GH. \qquad (1)$$

আবার এও দেখান হয়েছে যে BC, GH কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$$\therefore \quad GD = DH$$

$$\therefore \quad 2.GD = GH$$

তাহলে (1) থেকে পাওয়া যায়

$$AG = 2.GD$$

আবার $BG = HC = 2GF$ (AHC ত্রিভুজ থেকে)

এবং $CG = HB = 2.GF$ (ABH ত্রিভুজ থেকে)

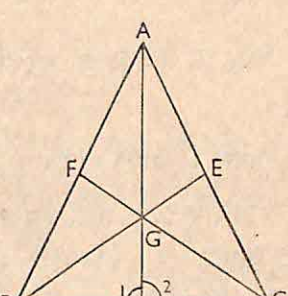
$$\left.\begin{aligned} \therefore\ & AG : GD = 2 : 1, \\ & BG : GE = 2 : 1 \\ \text{এবং}\ & CG : GF = 2 : 1 \end{aligned}\right\}$$

অতএব ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পরকে সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে (point of trisection) ছেদ করে।

ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র থেকে যে কোন শীর্ষের দূরত্ব ঐ শীর্ষগামী মধ্যমার দুই-তৃতীয়াংশ এবং ভূমির মধ্যবিন্দুর দূরত্ব এক-তৃতীয়াংশ।

§ 3·5 উদাহরণমালা

উদা. 1. দেখাও যে কোন ত্রিভুজের দুটি মধ্যমা সমান হলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।



প্রথম ধাপ।

ধরা যাক ABC ত্রিভুজের BE, CF যে কোন দুটি মধ্যমা। দেওয়া আছে যে BE ও CF সমান। দেখাতে হবে যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

দ্বিতীয় ধাপ।

ধরা যাক ত্রিভুজটির অপর মধ্যমাটি AD এবং G ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র।

তৃতীয় ধাপ।

যেহেতু $BE = CF$, অতএব

$$\tfrac{2}{3}.\ BE = \tfrac{2}{3}.\ CF$$

$$\therefore\ BG = CG$$

অতএব GDB ও GDC ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$BG=CG$, (এইমাত্র প্রমাণিত)

$BD=DC$ (কারণ, D, BC-র মধ্যবিন্দু)

এবং GD সাধারণ।

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। সুতরাং

$$\angle 1=\angle 2$$

অর্থাৎ BC ও তার উপর দণ্ডায়মান AD দ্বারা উৎপন্ন দুটি সন্নিহিত কোণ সমান। অতএব $\angle 1$ ও $\angle 2$ এর প্রত্যেকে এক সমকোণ। তাহলে ABD ও ACD ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$BD=DC$

AD সাধারণ

এবং অন্তর্ভূ'ত $\angle 1=$ অন্তর্ভূ'ত $\angle 2$

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। সুতরাং

$$AB=AC$$

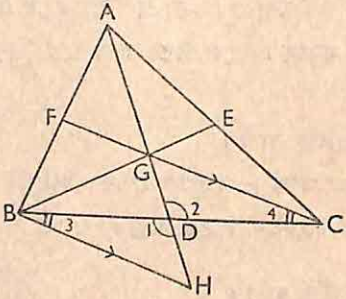
দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজের দুটি মধ্যমা সমান হলে যে বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত মধ্যমাগুলি সমান, ত্রিভুজের সেই বাহু দুটি সমান।

উদা. 2. ত্রিভুজের যে কোন দুটি মধ্যমা একত্রে তৃতীয় মধ্যমার চেয়ে বড়।

প্রমাণ। প্রথম ধাপ।

ধরা যাক যে কোন ত্রিভুজ ABC-র BE ও CF যে কোন দুটি মধ্যমা। তৃতীয় মধ্যমাটি AD হলে প্রমাণ করতে হবে যে

$$BE+CF>AD$$



দ্বিতীয় ধাপ। অঙ্কন।

B দিয়ে FC-র সমান্তরাল BH রেখা ধরা যাক বর্ধিত AD কে H বিন্দুতে ছেদ করে। ধরা যাক G ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র।

তৃতীয় ধাপ।

BDH ও CDG ত্রিভুজ দুটির মধ্যে

$\angle 1 =$ বিপ্রতীপ $\angle 2$

$\angle 3 =$ একান্তর $\angle 4$ ($\because$ $BH \parallel GC$ এবং BC ভেদক)

এবং $BD = DC$ ($\because$ D, BC-র মধ্যবিন্দু)

অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। সুতরাং

$BH = GC$ $\quad (i)$

এবং $GD = DH$ $\quad (ii)$

কিন্তু $GD = \frac{1}{2}.AG$

অতএব (ii) থেকে পাওয়া যায়

$GH = AG$ $\quad (iii)$

এখন BHG ত্রিভুজের

$BG + BH > GH$

অতএব (i) ও (ii) এর সাহায্যে,

$BG + CH > AG$

$\therefore \frac{2}{3} BE + \frac{2}{3} CF > \frac{2}{3}.AD$

$\therefore BE + CF > AD$

§ 3·6 প্রশ্নমালা

1. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AB$, BE মধ্যমার দৈর্ঘ্য 60 সেমি. এবং $ABE = 30°$। ত্রিভুজটির BA ভূমি থেকে A শীর্ষের উচ্চতা কত ?
উত্তর : 60 সেমি.
[সংকেত। A গামী উচ্চতা AL হলে মধ্যমাও AL ; ভরকেন্দ্র G হলে, $GL = \frac{1}{2} \times BG$ (§ 2 4, 13)।]
2. যে ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি সমান দেখাও যে সে ত্রিভুজ সমবাহু।
3. দেখাও যে, কান ত্রিভুজের বড় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা ছোট এবং ছোট বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা বড়।
4. দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমার (perimeter) তিন-চতুর্থাংশের চেয়েও বেশী।

5. দেখাও যে, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র ও তিনটি কৌণিক বিন্দুর সংযোজক রেখা দ্বারা ত্রিভুজটি তিনটি সমান ত্রিভুজে বিভক্ত হয়।

6. ABC ত্রিভুজের BE ও CF দুটি মধ্যমা এবং G তার ভরকেন্দ্র। দেখাও যে $\triangle GBC =$ চতুর্ভুজ $AFGE$.

7. $ABCD$ রম্বসের $\angle B = 120°$ এবং কর্ণ $AC = 30$ সেমি.। AD ও CD-র উপর যথাক্রমে BE ও BF লম্ব। এই লম্ব দুটি AC কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। MN এর দৈর্ঘ্য কত বের কর।

[সংকেত। প্রথমে দেখাও যে ABD একটি সমবাহু ত্রিভুজ। তারপর দেখাও যে E, AD-র মধ্যবিন্দু। রম্বসের কর্ণ দুটি ধর O তে মিলিত হয়েছে। ABD ত্রিভুজের AO, BE দুটি মধ্যমা M বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব $MO = \frac{1}{3}.AO$]

চতুর্থ অধ্যায়

সমকোণী ত্রিভুজ। পীথাগোরাসের উপপাদ্য।

§ 4·1 পীথাগোরাসের উপপাদ্য (**Pythagoras' Theorem**)।

এই অনুচ্ছেদে যে উপপাদ্যটির আলোচনা করা হবে তা গ্রীক পণ্ডিত জ্যামিতিকার পীথাগোরাস আবিষ্কার করেছিলেন। তাঁর নাম অনুসারে এই উপপাদ্যটি পীথাগোরাসের উপপাদ্য নামে সমধিক পরিচিত। এখানে এই উপপাদ্যটির জ্যামিতিক প্রমাণ দেওয়া হচ্ছে না। তবে পরীক্ষার সাহায্যে তার সত্যতা প্রতিপাদন করা হবে।

উপপাদ্য 13

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল তার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটোর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুটির ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

[The square on the hypotenuse of a right-angled triangle is equal to the sum of the squares on the other two sides.]

ব্যাখ্যা।

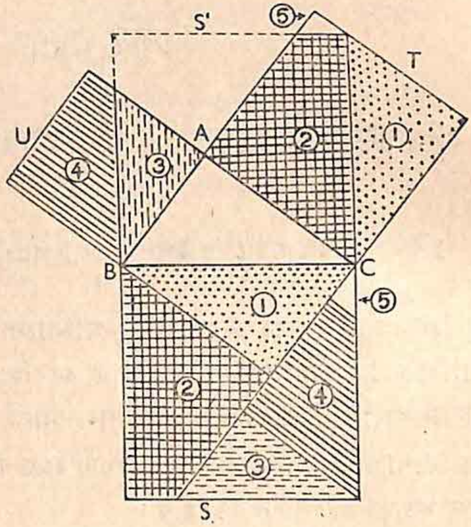
ধরা যাক ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ সমকোণ। BC তাহলে অতিভুজ। কোন বাহু, যেমন AB, এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র বলতে বুঝায় AB বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র। পীথাগোরাসের উপপাদ্যে বলা হচ্ছে যে BC অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র

$=CA$ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র $+AB$ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র।

প্রতিপাদন। প্রথম ধাপ।

একটু পুরু বড় একটি কাগজের উপর যে কোন একটি সমকোণী ত্রিভুজ *ABC* আঁক। ধর *BC* তার অতিভুজ এবং অপর দুটি বাহু যদি অসমান হয় তবে বড়টি *AC*।

ঐ কাগজটিতে ত্রিভুজের বাইরের দিকে *BC*, *CA* ও *AB*-র উপর তিনটি বর্গক্ষেত্র যথাক্রমে *S*, *T* ও *U* আঁক। এখন পরীক্ষা দ্বারা দেখাতে হবে যে



চিত্র নং—1

$$S=T+U$$

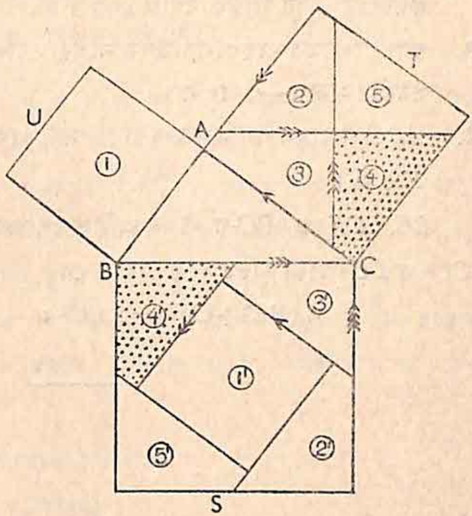
দ্বিতীয় ধাপ।

BC-র যে পার্শ্বে *S* এঁকেছ তার বিপরীত পার্শ্বেও ঐ বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র *S'* আঁক। লক্ষ্য কর যে (*S'*, *T* ও *U* এর সীমারেখাগুলো দ্বারা) *T* ও *U* মোট পাঁচটি (ক্ষেত্র বিশেষে চারটি) ক্ষেত্রে বিভক্ত হয়েছে। এই ক্ষেত্রগুলোকে চিত্র-প্রদর্শিত (চিত্র—1) 1, 2, 3, 4, 5 দিয়ে চিহ্নিত কর।

এরপর এই ক্ষেত্রগুলোকে কাঁচি দিয়ে কেটে আন। তাদেরকে *S* এর উপর 1, 2, 3, 4, 5-ক্রমে বসাও। *S*-এর গায়ের অনুরূপ চিহ্ন দেখে বুঝতে হবে কোথায় বসাতে হবে। ক্ষেত্রগুলোকে ঠিক ঠিক ভাবে বসালে দেখা যাবে যে *T* ও *U*-এর সব ক'টি টুকরা দিয়ে *S* ঠিক ভরে গেছে। এতে তাহলে এই প্রতিপাদিত হচ্ছে যে $S=T+U$

দ্বিতীয় ধাপের বিকল্প।

S-এর বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর ভিতর দিয়ে T-র বাহুগুলোর সমান্তরাল সরলরেখা টান। T-র কেন্দ্রের (তার কর্ণগুলো যেখানে ছেদ করে) মধ্য দিয়ে S-এর বাহুগুলোর সমান্তরাল সরলরেখা আঁক। চিত্রে তীর চিহ্নগুলি দেখে বোঝা যাবে কোন্‌টি কার সমান্তরাল। এভাবে S ও T-কে চিত্র-প্রদর্শিত কতকগুলো ছোট ছোট ক্ষেত্রে ভাগ কর। চিত্রে যে ভাবে চিহ্নিত করা হয়েছে তাদেরকে সে ভাবে চিহ্নিত কর।



চিত্র নং—2

এর পর কাঁচি দিয়ে 1,2,3,4 ও 5 ক্ষেত্রগুলোকে কেটে আন। তাদেরকে S-এর উপর এভাবে বসাও ঃ 1 কে 1′ এর উপর, 2 কে 2′ এর উপর, 3 কে 3′ এর উপর, ইত্যাদি। ক্ষেত্রগুলিকে ঘুরিয়ে ফিরিয়ে ঠিক ঠিক ভাবে বসালে তাদেরকে অনুরূপ চিহ্ন দেওয়া S এর অংশগুলোর সাথে সম্পূর্ণরূপে মিলিয়ে দেওয়া সম্ভব। অর্থাৎ পরীক্ষায় এই দেখতে পাবে যে সমস্ত T ও U এর বিভিন্ন টুকরাগুলো মিলে S এর সমান হয়। এই পরীক্ষায় উপপাদ্যটি প্রতিপাদিত হচ্ছে।

[প্রশ্ন। উপরের পরীক্ষায় যে সমকোণী ত্রিভুজটি এঁকেছো তাতে $AB=AC$ হলে 2, 3, 4, 5 ক্ষেত্রগুলি কেমন হবে?]

§ 4·2 প্রশ্নমালা

1. AB সরলরেখার মধ্য বিন্দু D হলে দেখাও যে AB-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র AD-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চারগুণ।

2. দেখাও যে রম্বসের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি তার কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

3. আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির উপর বর্গের সমষ্টি তার কর্ণদ্বয়ের উপর বর্গের সমষ্টির সমান—প্রমাণ কর।

4. ABC সমকোণী ত্রিভুজের A সমকোণ। AB ও AC-র মধ্যবিন্দু F ও E।

BE, CF ও BC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির কালি যথাক্রমে BE^2, CF^2 ও BC^2 দ্বারা সূচিত হলে দেখাও যে

$$4.(BE^2+CF^2)=5.BC^2 \text{।}$$

পঞ্চম অধ্যায়

জ্যামিতিক অঙ্কন

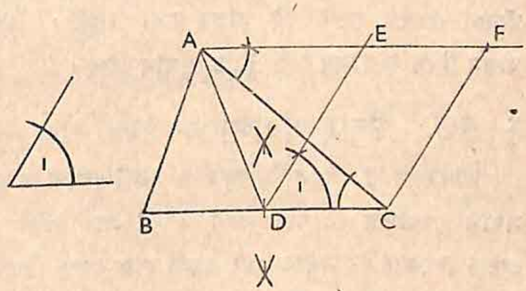
§ 5·1. জ্যামিতিক চিত্র আঁকার কাজে শুধু মাত্র স্কেল ও পেন্সিল-কম্পাস ব্যবহার করা হবে। স্কেলের ব্যবহার শুধু রেখা-সহায়রূপে সীমাবদ্ধ থাকবে। তবে যদি কোথাও কোন সুনির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যেমন 3 সেমি. মাপ করে নিতে হয় তবে তাকে সরল মাপনী হিসাবে ব্যবহার করা চলবে। চাঁদা, ত্রিকোনী ও কাঁটা-কম্পাস ব্যবহার করা হবে না।

যা আঁকতে দেওয়া থাকে তা আঁকা হয়ে গেলে আঁকা যে ঠিক হয়েছে তার একটি প্রমাণ দেওয়া আবশ্যক। তবে প্রমাণ মুখ্য উদ্দেশ্য নয়। অঙ্কনই আসল কাজ।

§ 5.2 **ত্রিভুজের সমান সামান্তরিক অঙ্কন।**

সম্পাদ্য 1.

একটি ত্রিভুজ ও একটি কোণ দেওয়া আছে। ঐ ত্রিভুজটির সমান ক্ষেত্রফল বিষিষ্ট একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ প্রদত্ত কোণটির সমান।



ধরা যাক *ABC* একটি প্রদত্ত ত্রিভুজ এবং $\angle 1$ একটি প্রদত্ত কোণ।

এই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ $\angle 1$-এর সমান হবে।

অঙ্কন। *ABC* ত্রিভুজের *BC* বাহুর মধ্যবিন্দু *D* বের কর। তার পর *D* বিন্দুতে $\angle 1$-এর সমান করে *CDE* কোণ আঁক। এবার *A* বিন্দু দিয়ে *BC*-র সমান্তরাল সরলরেখা *BEF* আঁক। ধর *DE* ও *AE*, *E*-তে ছেদ করে। *DC*-র সমান করে *AEF* থেকে *EF* কেটে নাও। *CF* যোগ কর। *DCFE* হবে একটি উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ। অঙ্কণ অনুসারে DC ও EF সমান্তরাল ও সমান। অতএব $DCFE$ একটি সামান্তরিক। অঙ্কণ অনুসারে এর একটি কোনও $\angle 1$-এর সমান।

এখন দেখাতে হবে ABC ত্রিভুজ ও $DCEF$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।

ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা ত্রিভুজটিকে দুটি সমান ত্রিভুজে বিভক্ত করে। কারণ ত্রিভুজ দুটি সমাণ ভূমি BD ও DC র উপর এবং একই সমান্তরালযুগল BC ও AF এর মধ্যে অবস্থিত। অতএব ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমগ্র ADC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। আবার ADC ত্রিভুজ ও $DCFE$ সামান্তরিক একই ভূতি DC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল DC ও AF এর মধ্যে অবস্থিত। অবএব ADC ত্রিভুজ $DCFE$ সামান্তরিকের অর্ধেক। তাহলে ABC ত্রিভুজ ও $DCFE$ সামন্তরিকের প্রত্যেকে ADC ত্রিভুজের দ্বিগুণের সমান। অতএব তারা পরস্পর সমান।

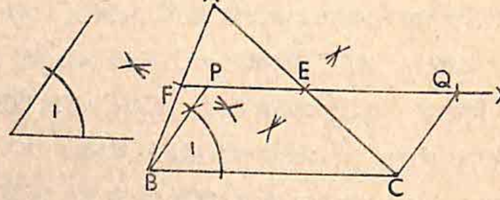
অতএব $DCFED$ ক্ষেত্রটি উদ্দিস্ট সামান্তরিক।

দ্রষ্টব্য। যে সামান্তরিক আঁকতে হবে তার বাহু সম্বন্ধে কোন কিছুই বলা নেই। সুতরাং বাহুর দৈর্ঘ বিভিন্ন রূপে বেছে নিয়ে সামান্তরিক আঁকা যায়। যেমন একটি বাহু BC-র এক চতুর্থাংশ নিয়ে এবং উচ্চতাকে ত্রিভুজটির উচ্চতার দ্বিগুণ করে একটি সামান্তরিক হতে পারে। উপরে যে সামান্তরিকটি আঁকা হয়েছে সেটি এই বাহুর মধ্যে একটি। এই বাহুর মধ্যে আরও দুটি অঙ্কন নিচে উদাহরণ 1 ও 3-তে দেখান হচ্ছে।

§ 5·3. উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. একটি ত্রিভুজ ও একটি কোণ দেওয়া আছে। ঐ ত্রিভুজটির সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোণ প্রদত্ত ঐ কোণটির সমান এবং একটি বাহু প্রদত্ত ত্রিভুজটির একটি বাহুর সমান।

ধরা যাক ABC একটি প্রদত্ত ত্রিভুজ এবং $\angle 1$ একটি প্রদত্ত কোণ। ধরা যাক যে সামান্তরিকটি আঁকতে হবে তার একটি বাহু BC-র



সমান। তাহলে সম্পাদ্যটি হল এই যে ABC ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি বাহু হবে BC-র সমান এবং একটি কোণ হবে $\angle 1$ এর সমান।

অঙ্কন। ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্য বিন্দু F বের কর। F বিন্দুর মধ্য দিয়ে BC-র সামান্তরাল সরলরেখা FX টান। (এই সামান্তরাল টানার জন্য AC-র মধ্য বিন্দু E বের করে FE যোগ করলেই চলে।) এবার B-তে $\angle 1$ এর সমান করে $\angle CBP$ কোণ আঁক। ধর BP, FX কে P বিন্দুতে ছেদ করে। তারপর BC-র সমাণ করে FX থেকে PQ অংশ কেটে নিয়ে $BCQP$ চতুর্ভুজ আঁক। তাহলে এই চতুর্ভুজটিই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হবে।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে $BCQP$ চতুর্ভুজের BC ও PQ বিপরীত বাহু যুগল সমান ও সামান্তরাল বলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। অঙ্কন অনুসারে এর একটি কোণ $\angle 1$ এর সমান। এখন দেখাতে হবে যে সামান্তরিক $BCQP$ ও ত্রিভুজ ABC-র ক্ষেত্রফল সমান।

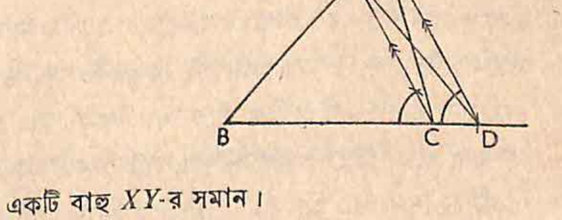
ABC ত্রিভুজের CF মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

অতএব ABC ত্রিভুজ FBC ত্রিভুজের দ্বিগুণ। আবার FBC ত্রিভুজ ও $BCQB$ সামান্তরিক একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও FX-এর মধ্যে অবস্থিত। অতএব ত্রিভুজটি সামান্তরিকটির অর্ধেক। তাহলে ABC ত্রিভুজ ও $BCQP$ সামান্তরিকের প্রত্যেকে FBC ত্রিভুজের দ্বিগুণ। অতএব তারা পরস্পর সমান।

তাহলে অঙ্কিত সামান্তরিকটি যথাযথভাবে অঙ্কিত হয়েছে।

উদাহরণ 2. ত্রিভুজের সমান ত্রিভুজ অঙ্কণ।

একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি ত্রিভুজ আঁক যার একটি বাহু একটি প্রদত্ত সসীম সরলরেখার সমান। [এই অঙ্কনটি উদাহরণ 3-র প্রয়োজনে এখানে সন্নিবেশিত হচ্ছে।]



ধরা যাক ABC একটি প্রদত্ত ত্রিভুজ এবং XY একটি প্রদত্ত সসীম সরলরেখা। ABC-র সমান এমন একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যার একটি বাহু XY-র সমান।

অঙ্কণ। BC বা বর্ধিত BC থেকে XY-র সমান করে BD অংশ কেটে নাও। AD যোগ কর। [কি ভাবে এগোতে হবে : লক্ষ্য কর ABD ত্রিভুজের ভূমি BD, XY-র সমান। কিন্তু ক্ষেত্রফলে ঐ ত্রিভুজটি $\triangle ABC$-র চেয়ে $\triangle ACD$ পরিমাণ কম বা বেশী। D, BC-র মধ্যবর্তী হলে কম হবে। তা না হলে বেশী হবে। উপরে আঁকা ছবিতে $\triangle ACD$ পরিমাণ বেশী হয়েছে। সুতরাং ভূমি BD ঠিক রেখে ABD ত্রিভুজের সঙ্গে ADE একটি ত্রিভুজ জুড়তে হবে বা ওর থেকে এটি বাদ দিতে হবে যাতে EBD ত্রিভুজটি হয় উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ। কিন্তু $\triangle ACD$ ও $\triangle ADE$ সমান হতে হবে। এদের AD বাহু সাধারণ। সুতরাং $EC \parallel AD$ নিতে হবে।]

তারপর DA-এর সমান্তরাল CE আঁক। ধরা যাক CE বর্ধিত BA কে বা BA কে E বিন্দুতে ছেদ করে। ED যোগ কর। EBD ত্রিভুজ উদ্দিষ্ট একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ। $\triangle ADC$ ও $\triangle ADE$ সমান। কারণ এরা একই ভূমি AD-র উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AD ও EC-র মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \quad \triangle EBD = \triangle ABD - \triangle ADE$ [উপরের আঁকা ছবিতে]

$$= \triangle ABD - \triangle ACD$$

$$= \triangle ABC$$

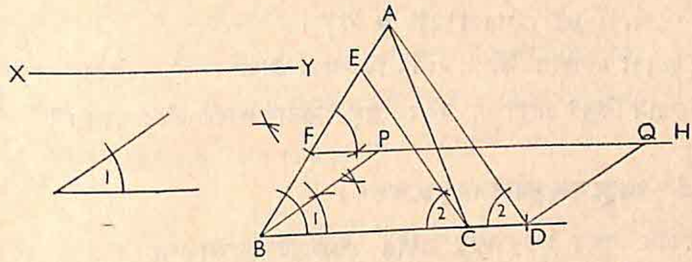
আবার অঙ্কন অনুসারে $BD = XY$। অতএব EBD প্রশ্ন অনুসারে অঙ্কিত একটি ত্রিভুজ।

উদাহরণ 3. একটি সসীম সরলরেখা, একটি কোণ ও একটি ত্রিভুজ দেওয়া আছে। এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি বাহু প্রদত্ত রেখাটির দৈর্ঘ্যের সমান, একটি কোণ প্রদত্ত কোণটির সমান এবং ক্ষেত্রফল প্রদত্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

[কি ভাবে এগোবে : উদাহরণ 2 অবলম্বনে প্রদত্ত ত্রিভুজটির সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এবং প্রদত্ত রেখাটির সমান ভূমি বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক। তারপর উদাহরণ 1 অবলম্বনে এই ত্রিভুজটির ভূমির উপর ত্রিভুজটির সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সামান্তরিক আঁক যার একটি কোণ প্রদত্ত কোণটির সমান।]

ধরা যাক ABC একটি ত্রিভুজ, XY একটি সসীম সরলরেখা এবং $\angle 1$ একটি কোণ দেওয়া আছে। ABC-র সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি

সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি বাহু XY-র সমান এবং একটি কোণ $\angle 1$ এর সমান।



অঙ্কন। BC বা বর্ধিত BC থেকে XY-র সমান করে BD অংশ কেটে নাও। AD যোগ কর। DA-র সমান্তরাল CE আঁক। এই সমান্তরাল রেখা ধরা যাক বর্ধিত BA কে বা BA কে E বিন্দুতে ছেদ করে। BE কে F বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। BD-র সমান্তরাল FH আঁক। প্রদত্ত $\angle 1$ কোণের সমান করে $\angle DBP$ কোণ আঁক। BP ধরা যাক FH কে P বিন্দুতে ছেদ করে। তারপর PH থেকে BD-র সমান করে PQ অংশ কেটে নিয়ে $BDQP$ চতুর্ভুজ আঁক। এই চতুর্ভুজটি উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

[এই চতুর্ভুজটি যে উদ্দিষ্ট সমান্তরিক তার প্রমাণ ছাত্রছাত্রীরা নিজে তৈরী করবে। এজন্য ED যোগ করতে হবে। উপরে 'কি ভাবে এগোবে' —থেকে কি ভাবে প্রমাণ করা যাবে তা সুস্পষ্ট।]

§ 5·4 প্রশ্নমালা

1. একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।
2. একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের সমান করে একটি প্রদত্ত সরলরেখার সমান বাহু-বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র আঁক।
3. একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের সমান একটি প্রদত্ত বাহুর উপর একটি আয়তক্ষেত্র আঁক।
4. 3 সেমি., 4 সেমি. ও 5 সেমি. বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের সমান এমন একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি বাহু 7 সেমি.।

5. 5 সেমি., 6 সেমি. ও 8 সেমি. বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের সমান এমন একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি বাহু 7 সেমি. এবং
   (*a*) একটি কোণ 60°,
   (*b*) দুটি কোণ $112\frac{1}{2}°$ ও $67\frac{1}{2}°$।

[চাঁদা ব্যবহার করবে না। কিভাবে আঁকলে তার বিবরণ বা প্রমাণ কোন কিছুই প্রয়োজন নেই। শুধু পরিষ্কার ভাবে এঁকে দাও।]

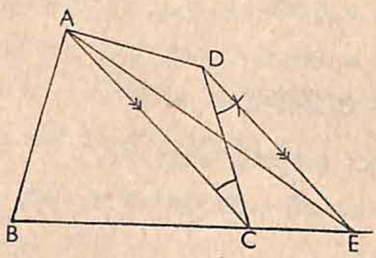
§ 5·5 বহুভুজের সমান ত্রিভুজ অঙ্কন।

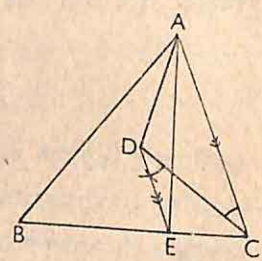
কোন প্রদত্ত চতুর্ভুজের সমান একটি ত্রিভুজ আঁকতে যে নীতি অনুসরণ করা হয় সেই একই নীতির অনুসরণে যে কোন প্রদত্ত বহুভুজের সমান ত্রিভুজ আঁকা যায়। তাই প্রথমে চতুর্ভুজের সমান ত্রিভুজাঙ্কনের আলোচনা করা হচ্ছে। তারপর নীতিটিকে সুস্পষ্ট করে তোলার জন্য পঞ্চভুজের সমান ত্রিভুজাঙ্কন দেখান হবে। সবশেষে কিভাবে যে কোন বহুভুজের সমান ত্রিভুজ আঁকা যেতে পারে তা বলা হবে।

সম্পাদ্য 2A

একটি প্রদত্ত চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে।

ধরা যাক *ABCD* একটি প্রদত্ত চতুর্ভুজ। এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে।





অঙ্কন। *AC* যোগ কর। *AC*-র সমান্তরাল *DE* টান। ধরা যাক *DE* রেখা বর্ধিত *BC* বা *BC*কে *E* বিন্দুতে ছেদ করে। *AE* যোগ কর। *ABE* হবে উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে ACD ও ACE ত্রিভুজ দুটি একই ভূমি AC-র উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগল AC ও DE-র মধ্যে অবস্থিত। অতএব তারা সমান।

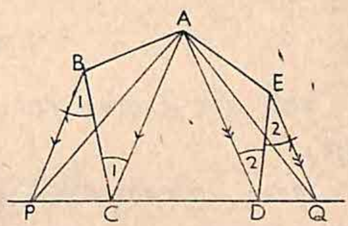
এখন $ABCD$ চতুর্ভুজ থেকে ACD ত্রিভুজ বাদ দিয়ে (ক্ষেত্র বিশেষে চতুর্ভুজের সঙ্গে ত্রিভুজটি যোগ করে) সমপরিমাণ ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ACE যোগ করলে (বা ক্ষেত্রবিশেষে বিয়োগ করলে) মোট ক্ষেত্রের পরিমাণ একই থাকে। কিন্তু ক্ষেত্রটির আকার হয়ে দাঁড়ায় $\triangle ABE$। অতএব

$$\triangle ABE = \text{চতুর্ভুজ } ABCD।$$

সম্পাদ্য 2B

একটি প্রদত্ত পঞ্চভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে

ধরা যাক $ABCDE$ একটি পঞ্চভুজ এর সমান একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে।



অঙ্কন। AC ও AD যোগ কর। AC-র সমান্তরাল BP এবং AD-র সমান্তরাল EQ টান। ধরা যাক BP ও EQ বর্ধিত CD বা CDকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। AP ও AQ যোগ কর। APQ হবে উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ। একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত—এই যুক্তিতে

$$\triangle ADE = \triangle ADQ$$

এবং $$\triangle ACB = \triangle ACP।$$

সমগ্র পঞ্চভুজটিকে $\triangle ABC$, ACD ও ADE এর সমন্বয়রূপে কল্পনা করা যায়। এদের মধ্যে প্রথম ও শেষ ত্রিভুজটি ACP ও ADQ ত্রিভুজ দিয়ে প্রতিস্থাপন করে দেখা যায় যে এই তিনের সমন্বয় APQ ত্রিভুজ। তাহলে

$$\triangle APQ = \text{পঞ্চভুজ } ABCDE।$$

দ্রষ্টব্য 1° সম্পাদ্য 2A-তে চতুর্ভুজ থেকে একটি ত্রিভুজাকার অংশ বাদ দিয়ে তার বদলে চতুর্ভুজটির সঙ্গে সমান একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র জুড়ে দিয়ে চতুর্ভুজ থেকে সমান ত্রিভুজে আসা হয়েছে। এই একই কৌশল অবলম্বন করা হয়েছে সম্পাদ্য 2B-তে। এই কৌশল পঞ্চভুজে একসঙ্গে দুপাশে কাজে

লাগিয়ে তাকে একবারে ত্রিভুজে নিয়ে আসা হয়েছে। কিন্তু এ কৌশল যদি যুগপৎ দুপাশে কাজে না লাগান হত তাহলে এক পাশে যেমন AD-র ধারে, কাজে লাগালে পঞ্চভুজটি $ABCQ$ চতুর্ভুজে রূপান্তরিত হত। তারপর আবার একই কৌশল $ABCQ$ চতুর্ভুজের উপর প্রয়োগ করে তাকে একটি ত্রিভুজের রূপ দেওয়া যেত। তাহলে কাজের সুবিধার জন্য পঞ্চভুজ থেকে বাহু সংখ্যা কমিয়ে আনা একবারে হোক আর দুবারে হোক, বস্তুতঃপক্ষে তা হল চতুর্ভুজ থেকে ত্রিভুজে আসার কৌশলের পুনঃপুনঃ প্রয়োগ।

দ্রষ্টব্য 2° চতুর্ভুজের বা পঞ্চভুজের সমান যে ত্রিভুজ আঁকা হয়েছে সেইটিই যে একমাত্র সম্ভাব্য ত্রিভুজ তা নয়। এরকম ত্রিভুজ যতগুলি খুশী আঁকা যায়।

সম্পাদ্য 2

একটি প্রদত্ত বহুভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে।

নিয়ম। প্রদত্ত বহুভুজটিতে তার একটি ত্রিভুজাকার অংশ ও অন্য একটি সমান ত্রিভুজাকার অংশ যোগ-বিয়োগ করে বহুভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট অন্য একটি বহুভুজে রূপান্তরিত করা যাবে যার বাহুর সংখ্যা মূল বহুভুজের বাহুর সংখ্যার চেয়ে 1 কম। এই কৌশল বার বার প্রয়োগ করে প্রদত্ত বহুভুজটিকে শেষ পর্যন্ত একটি ত্রিভুজে রূপান্তরিত করা যায়। সম্পাদ্য 2A ও 2B এর উদাহরণ।

§ 5·6 প্রশ্নমালা

1. একটি চতুর্ভুজের সমান করে একটি আয়তক্ষেত্র আঁক।
   [সংকেত। প্রথমে চতুর্ভুজটির সমান ত্রিভুজ আঁক এর পরে ঐ ত্রিভুজের সমান আয়তক্ষেত্র আঁক।]
2. একটি পঞ্চভুজের সমান একটি সামান্তরিক আঁক।
3. একটি প্রদত্ত ষড়ভুজের সমান একটি ত্রিভুজ আঁক।
4. একটি প্রদত্ত চতুর্ভুজের সমান এমন একটি আয়তক্ষেত্র আঁক যার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য প্রদত্ত একটি দৈর্ঘ্যের সমান। অঙ্কনের বিবরণ লেখা বা প্রমাণ দেওয়া কোনকিছু প্রয়োজন নেই।

প রি মি তি

§ 1. আলোচনার গণ্ডী।

গণিতের যে শাখায় কোন ঘন বস্তু (solid), তল (surface), রেখার (curve) বা তাদের অংশ বিশেষের আয়তন (volume), ক্ষেত্রফল (area), দৈর্ঘ্যের পরিমাপ নিয়ে আলোচনা করা হয় তাকে পরিমিতি (mensuration) বলা হয়।

আমাদের এখানে শুধু আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, ত্রিভুজ ও বৃত্তকে নিয়ে আলোচনা করা হবে। অবশ্য এই সঙ্গে প্রাসঙ্গিক অতিরিক্ত দু একটি সূত্রের অবতারণা করা হবে। এই অতিরিক্ত অংশগুলি অপেক্ষাকৃত ছোট হরফে ছাপা থাকবে (§6)। ওগুলোকে বাদ দিয়ে পড়লেও পাঠের গতি অব্যাহত থাকবে এবং পাঠে অবিচ্ছিন্নতাও বজায় থাকবে।

এই বইয়ের জ্যামিতি অংশের দ্বিতীয় অধ্যায়ে আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও ত্রিভুজ কাকে বলে তা বলা হয়েছে। বৃত্তের সংজ্ঞা পরে যথাস্থানে দেওয়া হবে।

§ 2. পরিসীমা।

সংজ্ঞা। কোন সামতলিক ক্ষেত্র যে সীমারেখা দিয়ে ঘেরা তার মোট দৈর্ঘ্যকে ঐ ক্ষেত্রের **পরিসীমা** (perimeter) বলা হয়।

নিচে কয়েকটি ক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয়ের সূত্র দেওয়া হল।

আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2×(দৈর্ঘ্য+প্রস্থ),

বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 4×বাহু,

ত্রিভুজের পরিসীমা = তিন বাহুর সমষ্টি,

সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা = 3 বাহু।

প্রমাণ।

$ABCD$ আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা

$$=AB+BC+CD+DA$$
$$=AB+BC+AB+BC$$
$$=2\times AB+2\times BC$$
$$=2\times(AB+BC)$$

=2×(দৈর্ঘ্য+প্রস্থ)।

এই হল প্রথম সূত্রটির প্রমাণ। অন্যান্য সূত্রগুলির প্রমাণ স্পষ্ট।

§ 3. **ক্ষেত্রফল। একক।**

এই বইয়ের জ্যামিতি অংশের § 2·1-তে দেখান হয়েছে যে ক্ষেত্র পরিমাপ-যোগ্য জিনিস।

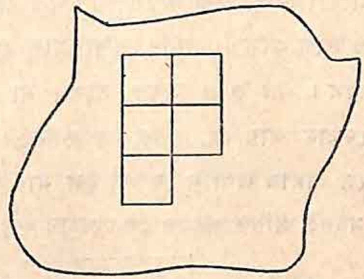
সংজ্ঞা। কোন সসীম সামতলিক ক্ষেত্র তার সমতলে যেটুকু জায়গা দখল করে তার পরিমাপকে ঐ ক্ষেত্রের **ক্ষেত্রফল** বা **কালি** (area) বলা হয়। অর্থাৎ ক্ষেত্রটির বহিঃ সীমারেখার ভিতরে যেটুকু জায়গা থাকে তার পরিমাপই হল তার ক্ষেত্রফল বা কালি।

পরিমাপযোগ্য জিনিসকে মাপতে হলে একটি একক দরকার। যেমন দৈর্ঘ্য মাপবার জন্য মিটার বা ঐ রকম কোন একক নেওয়া হয় এবং তারপর কোন দৈর্ঘ্যকে বলা হয় যে 27 মিটার বা অনুরূপ কিছু হয়েছে। এখানে একক বলতে একটা নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে এক মিটার ধরা হয়েছে এবং অন্যান্য দৈর্ঘ্যকে এই দৈর্ঘ্যের গুণিতক (multiple)-রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। যেমন 27 মিটার বলতে 1 মিটার দীর্ঘ কোন জিনিসের 27 গুণ বুঝান হচ্ছে। ক্ষেত্রফলের একক হিসাবেও তেমনি নেওয়া হয় একটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ক্ষেত্র। এই ক্ষেত্রটি হল একক দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র বা বর্গাকার ক্ষেত্র।

সংজ্ঞা। এক একক দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র তার তলে যেটুকু জায়গা দখল করে তার পরিমাপকে এক **একক** (unit) **ক্ষেত্রফল**রূপে নেওয়া হয়। এক একক ক্ষেত্রফলকে এক **বর্গরৈখিক-একক** রূপে লেখা হয়। যেমন দৈর্ঘ্যের একক মিটার নিলে ক্ষেত্রফলের একক হয় বর্গমিটার।

স্পষ্টতঃ এই একক বর্গক্ষেত্রের মধ্যস্থ ক্ষেত্রটুকুর পরিমাণ নির্ভর করছে তার বাহুর একক কি নেওয়া হচ্ছে তার উপর। বাহু 1 মিটার হলে ক্ষেত্রফল হয় 1 বর্গমিটার, বাহু 1 সেন্টিমিটার হলে ক্ষেত্রফল হয় 1 বর্গসেন্টি-মিটার ইত্যাদি। বর্গসেন্টিমিটার একটি ছোট একক এবং বর্গমিটার একটি বড় একক। জমি জায়গা মাপ করার জন্য যে বর্গাকার ভূখণ্ডের ক্ষেত্রফলকে একক হিসাবে নেওয়া হয় তার বাহুর দৈর্ঘ্য 1 হেক্টোমিটার এবং এই ভূখণ্ডের ক্ষেত্রফলকে বলা হয় 1 হেক্টার। যে বর্গক্ষেত্রের বাহু এক ডেকামিটার তার ক্ষেত্রফলকে বলা হয় এক **আর** (Are)।

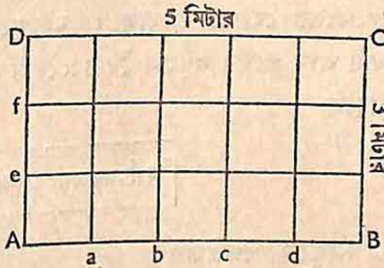
কোন ক্ষেত্র 1 একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট যতগুলি ক্ষেত্রের সমষ্টির সমান তার ক্ষেত্রফল 1 একক ক্ষেত্রফলের তত গুণ হয়। এখান থেকে কিভাবে কোন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের করা যেতে পারে তার কৌশল স্পষ্ট [চিত্র দেখ]। সব রকমের ক্ষেত্রকে 1 একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কতকগুলি বর্গাকার ক্ষেত্রে বিভক্ত করা সম্ভব নয়। তাই একেবারে সঠিক মাপ পেতে হলে এ কৌশল সব ক্ষেত্রের বেলায় খাটানো চলে না। § 4 ও § 16-তে নির্ভুল ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র কয়েকটি ক্ষেত্রের জন্য দেওয়া হয়েছে।



§ 4. ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রাবলী।

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

ধরা যাক *ABCD* একটি বর্গ-ক্ষেত্র এবং এর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য মিটার এককে মাপ নিলে হয় $AB=5$ মিটার ও $AD=3$ মিটার।



AB বাহুকে *a, b, c, d* বিন্দুতে 1 মিটার দৈর্ঘ্যের সমান পাঁচ ভাগে এবং *AD* বাহুকে *e, f* বিন্দুতে 1 মিটার দৈর্ঘ্যের সমান তিন ভাগে ভাগ করা যাক। *a, b, c, d* বিন্দুর এক একটির ভিতর দিয়ে *AD*-র সমান্তরাল সরলরেখা এবং *e, f* বিন্দুর এক একটির ভিতর দিয়ে *AB*-র সমান্তরাল সরলরেখা টানা যাক্। এই সরলরেখাগুলি সমস্ত আয়তক্ষেত্রটিকে 5×3 বা 15টি সমান বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত করবে। *AB* ও *AD*-কে যেভাবে বিভক্ত করা হয়েছে সেখান থেকে স্পষ্ট যে এই বর্গক্ষেত্রগুলির প্রত্যেকটির বাহু 1 মিটার। অর্থাৎ তাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রফল 1 বর্গমিটার। অতএব আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 15 বর্গমিটার। এই ক্ষেত্রফল বের করার পদ্ধতি

থেকে স্পষ্ট যে আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ গুণ করে তা পাওয়া গেছে। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মাপ যদি 5 মি. ও 3 মি. না হয়ে অন্য কিছু হয় তবেও প্রমাণ করা যায় যে, ক্ষেত্রফল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের গুণফলের সমান হয়। যেমন ধরা যাক দৈর্ঘ্য m একক ও প্রস্থ n একক তাহলে, m ও n অখণ্ড সংখ্যা হলে, ঠিক একই নিয়মে (অর্থাৎ দৈর্ঘ্যকে m ভাগ করে এবং প্রস্থকে n ভাগ করে) প্রমাণ করা যায় যে ক্ষেত্রফল $m \times n$ বা mn বর্গ একক হবে। m ও n অখণ্ড সংখ্যা না হয়ে ভগ্নাংশ হলে প্রায় একই নিয়মে দেখান যায় যে, ক্ষেত্রফল তখনও দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের গুণফলের সমান হয়। সে প্রমাণ এখানে দেওয়া হল না। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যা-ই হোক না কেন, সব সময়ই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের জন্য নিচের সূত্র ব্যবহার করা যায়ঃ

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

সব বর্গক্ষেত্রই আয়তক্ষেত্র। তাহলে আয়তক্ষেত্রের জন্য তৈরী সব সূত্রই বর্গক্ষেত্রের বেলায় প্রযোজ্য। বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান। সুতরাং দৈর্ঘ্য আর প্রস্থের গুণফল দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য বা (দৈর্ঘ্য)^2 বা (বাহু)^2-এর সমান। তাহলে

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বাহু)^2

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা

প্রমাণ। একই ভূমি ও একই উচ্চতা বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ ও একটি আয়তক্ষেত্র নেওয়া যাক।

তাহলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

= $\frac{1}{2}$ × আয়তক্ষেত্রটির ভূমি × উচ্চতা

= $\frac{1}{2}$ × ত্রিভুজের ভূমি × উচ্চতা,

কারণ ত্রিভুজটির ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে আয়তক্ষেত্রটির ভূমি ও উচ্চতার সমান।

§ 5. বিভিন্ন এককের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক।

নিচে ক্ষেত্রফলের বিভিন্ন এককগুলির মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক দেখান হল। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্রের (§ 4) সাহায্যে এই সম্পর্কগুলির যথার্থতা প্রমাণ করা যায়।

1 হেক্টার = 1 হেক্টো আর = 100 আর
= 1 বর্গহেক্টোমিটার = 100 বর্গডেকামিটার
= 10000 বর্গমিটার

1 আর = 1 বর্গডেকামিটার = 100 বর্গমিটার।

1 বর্গমিটার = 10000 বর্গসেন্টিমিটার = 1000000 বর্গমিলিমিটার।

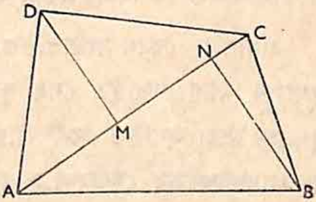
§ 6. বিশেষ ক্ষেত্র।

সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\times$ সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির গুণফল

§ 6. চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল।

চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\times$ যে কোন কর্ণ $\times$ ঐ কর্ণের বিপরীত দুটি শীর্ষ থেকে কর্ণ পর্যন্ত অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি

প্রমাণ।



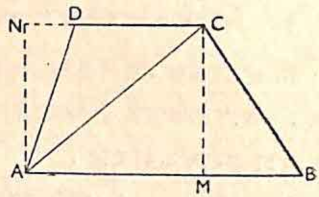
$ABCD$ যে কোন চতুর্ভুজের AC যে কোন কর্ণ। D ও B থেকে AC কর্ণ পর্যন্ত DM ও BN লম্ব টানা হল। তাহলে

চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল $= \triangle ACD + \triangle ABC$
$= \frac{1}{2}\times AC\times DM + \frac{1}{2}\times AC\times BN$
$= \frac{1}{2}\times AC\times(DM+BN)$
$= \frac{1}{2}\times$ যে কোন কর্ণ $\times$ ঐ কর্ণের দুই বিপরীত শীর্ষ থেকে ঐ কর্ণ পর্যন্ত অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি।

ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল।

ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যে লম্ব-দূরত্ব

প্রমাণ।



ধরা যাক $ABCD$ একটি যে কোন ট্রাপিজিয়াম যার $AB \parallel DC$, AC কর্ণ টেনে ট্রপিজিয়মটিকে দুটি ত্রিভুজ DAC ও BCA-তে ভাগ করা যাক। A থেকে DC-র উপর AN এবং C থেকে AB-র উপর CM লম্ব টানা যাক।

তাহলে, ট্রাপিজিয়ম $ABCD = \triangle BCA + \triangle DCA$

$$= \tfrac{1}{2} \times AB \times CM + \tfrac{1}{2} \times DC \times AN$$
$$= \tfrac{1}{2} \times AB \times CM + \tfrac{1}{2} \times DC \times CM \quad [\because AN = CM]$$
$$= \tfrac{1}{2} \times (AB + DC) \times CM$$

$= \frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $\times$ তাদের মধ্যে দূরত্ব।

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

অর্থাৎ কোন সামান্তরিকের ভূমিকে তার উচ্চতা দিয়ে গুণ করলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়।

প্রমাণ। কোন সামান্তরিক যে ভূমির উপর দণ্ডায়মান ও যে সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত সেই ভূমির উপর দণ্ডায়মান ও সেই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত একটি আয়তক্ষেত্র নেওয়া যাক। তাহলে ঐ সামান্তরিক ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হবে। কিন্তু আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হল দুই সন্নিহিত বাহুর গুণফল। তাকে ভূমি ও উচ্চতার গুণফলও বলা চলে। এখানে যেহেতু আয়তক্ষেত্র ও সামান্তরিকের ভূমি ও উচ্চতা একই এবং ক্ষেত্রফল সমান, অতএব

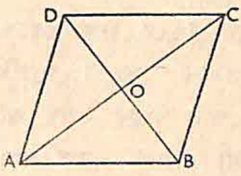
সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
= আয়তক্ষেত্রের ভূমি × উচ্চতা
= সামান্তরিকের ভূমি × উচ্চতা।

রম্বসের ক্ষেত্রফল।

রম্বসের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × কর্ণদ্বয়ের গুণফল

প্রমাণ।

ধরা যাক $ABCD$ যে কোন একটি রম্বস। এর কর্ণ দুটি ধরা যাক O বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু রম্বসের কর্ণদুটি পরস্পর লম্ব, অতএব $DO \perp AC$ এবং $BO \perp AC$। অতএব



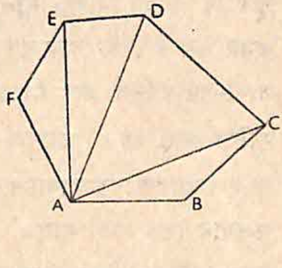
$$\begin{aligned}\text{রম্বস } ABCD &= \triangle ACD + \triangle ABC\\ &= \tfrac{1}{2}\times AC\times DO+\tfrac{1}{2}\times AC\times BO\\ &= \tfrac{1}{2}\times AC\times(DO+BO)\\ &= \tfrac{1}{2}\times AC\times BD\\ &= \tfrac{1}{2}\times \text{কর্ণদ্বয়ের গুণফল।}\end{aligned}$$

বিশেষ ক্ষেত্র। বর্গক্ষেত্র একটি বিশেষ গুণবিশিষ্ট রম্বস। এর কর্ণ দুটির দৈর্ঘ্য সমান। অতএব বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের বিকল্প সূত্র হিসাবে লেখা যায়

$$\boxed{\text{বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = \tfrac{1}{2}\times(\text{কর্ণ})^2}$$

বহুভুজের ক্ষেত্রফল।

যে কোন বহুভুজ, যেমন $ABCDEF$-এর ক্ষেত্রফল বের করতে হলে যে কোন কৌণিক বিন্দু A-র সঙ্গে অন্য কৌণিক বিন্দুগুলি যোগ করে সমস্ত ক্ষেত্রটিকে কতকগুলি ত্রিভুজে ভাগ করে নিতে হয়। তারপর ঐ ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল বের করে তাদের যোগ করে দিলেই তা বহুভুজটির ক্ষেত্রফল হবে।



মন্তব্য। বহুভুজটি সুষম হলে তার ঠিক মাঝখানের বিন্দু থেকে কৌণিক বিন্দুগুলি পর্যন্ত রেখা টেনে বহুভুজটিকে কতকগুলি সর্বসম ত্রিভুজে ভাগ করা যায়। এরপর ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রের সাহায্যে এই ত্রিভুজ-গুলির ক্ষেত্রফল বের করে সমগ্র বহুভুজটির ক্ষেত্রফল বের করা যায়।

§ 7. পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিকল্প বয়ান (statement)।

§4-তে দেখা গেছে যে কোন বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল তার (বাহু)^2 এর সমান। সুতরাং জ্যামিতি অংশে (§4·1) পীথাগোরাসের উপপাদ্যে যেখানে কোন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের উল্লেখ আছে সেখানে ঐ বাহুর বর্গ বা (বাহু)^2—এরূপ লেখা চলে। অতএব পীথাগোরাসের উপপাদ্যকে বিকল্পে এভাবেও লেখা চলে ঃ

ABC যে কোন সমকোণী ত্রিভুজের BC অতিভুজ হলে (অর্থাৎ $\angle A = 1$ সমকোণ হলে),

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

এই ত্রিভুজের BC, CA, AB কে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা সূচিত করলে,

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

এক একক বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজের অতিভুজ।

একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহু দুটির প্রত্যেকটি 1 একক। তার অতিভুজ কত ?

x একক যদি অতিভুজ হয়, তবে $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$। তাহলে x হবে 2-এর বর্গমূল। কিন্তু 2-এর বর্গমূল আকর্ষণ করা সম্ভব নয়। অথচ অতিভুজটির একটি নির্দিষ্ট মান অবশ্যই আছে। সেই নির্দিষ্ট মান (x একক) এমন একটি দৈর্ঘ্য যার বর্গ হয় 2 বর্গ একক। অতিভুজটির প্রকৃত সংখ্যামান, যা 2-এর বর্গমূল এবং যা বের করা সম্ভব নয়, তাকে $\sqrt{2}$ প্রতীক দিয়ে সূচিত করা হয়। তাহলে বলা যায় অতিভুজ $= \sqrt{2}$ একক। দশমিকের বর্গমূল আকর্ষণের সাধারণ প্রক্রিয়ায় 2-এর বর্গমূলের মোটামুটি একটি মান বা স্থূলমান বের করা যায়। তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ এই মান 1·414, ইচ্ছা করলে আরও সূক্ষ্ম মান (যেমন পাঁচ বা ছয় দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ) একই নিয়মে বের করা যায়।

$\sqrt{3}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{\frac{5}{7}}\left(=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)$, প্রভৃতির অনুরূপ সংজ্ঞা দেওয়া যায়। এখানে $\sqrt{49}$-এর প্রকৃত মান অবশ্য বের করা সম্ভব। তা হল 7।

§ 8. কয়েকটি দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সূত্র।

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ = $\sqrt{}$[সমকোণ সংলগ্ন বাহুদুটির বর্গের সমষ্টি]

সমকোণী ত্রিভুজের কোন বাহু = $\sqrt{(\text{অতিভুজ})^2-(\text{অপর বাহু})^2}$

আয়তক্ষেত্রের কর্ণ = $\sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2+(\text{প্রস্থ})^2}$

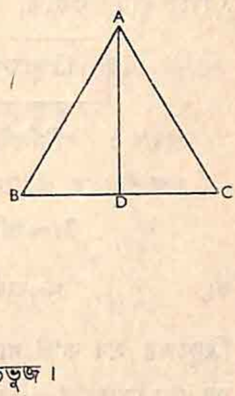
বর্গক্ষেত্রের কর্ণ = $\sqrt{2}$ × বাহু।

এই সূত্রগুলি পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে সহজেই পাওয়া যায়।

সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times$ বাহু।

প্রমাণ।

ধরা যাক ABC যে কোন একটি সমবাহু ত্রিভুজের AD যে কোন একটি মধ্যমা। এক্ষেত্রে মধ্যমা ত্রিভুজটির উচ্চতা। যে কোন বাহুর দৈর্ঘ্য a দ্বারা সূচিত হলে দেখাতে হবে যে



$$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\text{।}$$

যেহেতু D, BC-র মধ্যবিন্দু অতএব

$$BD=\tfrac{1}{2}.BC=\tfrac{1}{2}a\text{।}$$

এখন ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার AB হল অতিভুজ।

$$\therefore\quad AD^2=AB^2-BD^2$$
$$=a^2-(\tfrac{1}{2}a)^2$$
$$=\tfrac{3}{4}\cdot a^2$$
$$\therefore\quad AD=\frac{\sqrt{3}}{2}\,a \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

§ 9. সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\text{বাহু})^2$

প্রমাণ।

সমবাহু ত্রিভুজের এক একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a দিয়ে সূচীত করলে,

ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a$ [উচ্চতার সূত্র ব্যবহার করে]

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times$ (বাহু)^2। (প্রমাণিত)

§ 10. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের একটি বিশেষ সূত্র।

ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে a, b, c দিয়ে এবং অর্ধ পরিসীমাকে s দিয়ে সূচিত করলে,

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

প্রমাণ। পরিশিষ্ট দ্রষ্টব্য।

লক্ষ্যণীয় যে, এখানে

$$2s=\text{পরিসীমা}=a+b+c$$

বা, $$s=\text{অর্ধপরিসীমা}=\frac{a+b+c}{2}$$

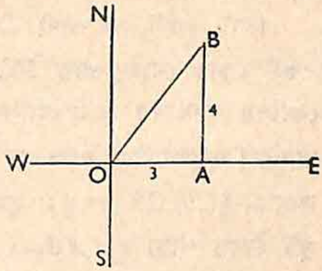
ত্রিভুজের সব ক'টি বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে s, a, b. c সবগুলোই জানা হয় এবং সেক্ষেত্রে এ সূত্র খুব সহায়ক হয়।

মন্তব্য। কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু জানা থাকলে এই সূত্র সাহায্যে তার ক্ষেত্রফল এবং তারপর §4 এর শেষ সূত্র প্রয়োগ করে তার যে কোন শীর্ষগামী উচ্চতা বের করা যায়। [উদাহরণ 5 দ্রষ্টব্য।]

§ 11. উদাহরণমালা

উদাহরণ 1. একজন ভদ্রলোক কোন স্থান থেকে পূর্বদিকে 3 কিলোমিটার পথ যাওয়ার পর উত্তর দিকে 4 কিলোমিটার গেলেন। তাঁর প্রথম স্থান থেকে শেষ স্থানের দূরত্ব কত?

O থেকে রওনা হয়ে যদি পূর্ব-দিকে OA পথ এবং পরে উত্তর দিকে AB পথ যান তবে ভদ্রলোকের প্রথম ও শেষ স্থানের মধ্যে দূরত্ব OB।



স্পষ্টতঃ OAB একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর $\angle A$ = এক সমকোণ। অতএব

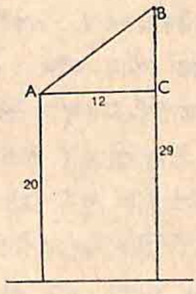
$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$
$$= 3^2 + 4^2$$
$$= 25 = 5^2।$$

$\therefore\ OB = 5$ কিলোমিটার।

নির্ণেয় দূরত্ব $= 5$ কিলোমিটার। (উত্তর)

উদাহরণ 2. দুটি স্তম্ভের মধ্যে দূরত্ব 12 মিটার। তাদের উচ্চতা 20 মিটার ও 29 মিটার। তাদের শীর্ষদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত?

ছোট স্তম্ভটির শীর্ষ ধরা যাক A এবং বড়টির শীর্ষ B। A দিয়ে আঁকা ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা ধরা যাক বড় স্তম্ভটিকে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে



$AC = 12$ মিটার, ও $CB = 29 - 20$ বা 9 মিটার। ACB একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং AB অতিভুজ। এতএব

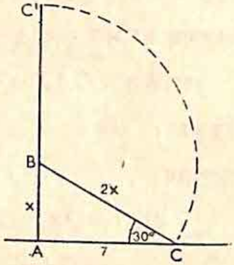
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$= 9^2 + 12^2 = 225 = 15^2$$

$\therefore\ AB = 15$ মিটার।

অতএব শীর্ষ দুটির মধ্যে দূরত্ব 15 মিটার।

উদাহরণ 3. একটি উঁচু সরল গাছে (ABC') তার কাণ্ডের এক জায়গায় (B-তে) ভেঙ্গে গেল এবং ভাঙ্গা অংশটি (BC) সম্পূর্ণ আলাদা না হয়ে মূল গাছের সঙ্গে লেগে রইল। গাছের আগাটি (C') তার গোড়া (A) থেকে 7 মিটার দূরে (C-তে) মাটিতে ঠেকল এবং ভাঙ্গা অংশটি (BC)

মাটির সাথে (AC) প্রায় 30° কোণ উৎপন্ন করল। গাছটি ভাঙ্গার আগে কত উঁচু ছিল।



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর একটি কোণ যেহেতু প্রায় 30°, অতএব ঐ কোণের সামনের বাহু অতিভুজের প্রায় অর্ধেক [ছাত্রছাত্রীরা নিজে এর প্রমাণ তৈরী করবে—§ 2·4, 13 দেখ]। সুতরাং মোটামুটি ধরতে পারা যায় $AB=x$, $BC=2x$। পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে,

$$BC^2=AB^2+AC^2,$$

$\therefore\ (2x)^2=x^2+7^2$

বা, $3x^2=49$,

$\therefore\ x^2=$ প্রায় 16,

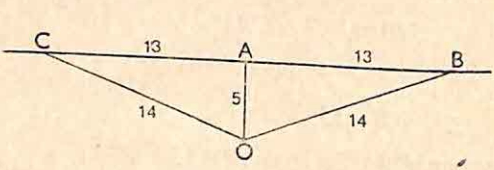
$\therefore\ x=$ প্রায় 4 মিটার।

$\therefore$ গাছটি মোট উচ্চতা $=AB+BC$

$=x+2x=3x$

$=12$ মিটার প্রায়।

উদাহরণ 4. একটি দীর্ঘ সরল তৃণশ্রেণী [ফসল তুলে নেওয়ার শেষে জমির কোন আল (বা আইল)-কে এরূপ তৃণ শ্রেণী মনে করা যায়] থেকে 5 মিটার দূরে একটি খুঁটিতে 14 মিটার দীর্ঘ একটি দড়ি দিয়ে একটি গরু বাঁধা আছে। গরুটি ঐ সামনের তৃণশ্রেণীর কতটা দৈর্ঘ্য খেতে পারবে?



O যদি খুঁটি হয়, OA যদি তৃণশ্রেণীর উপর অঙ্কিত লম্ব হয় এবং গরুটি যদি A-র এক পার্শ্বে B পর্যন্ত খেতে পারে তবে OAB একটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে যার

$OA=5$ মিটার,

$OB=$ দড়ির দৈর্ঘ্য $=14$ মিটার।

$\therefore \quad AB^2 = OB^2 - OA^2$

$= 14^2 - 5^2 = 171 = 13^2$ (প্রায়)

$\therefore \quad AB = 13$ মিটার। (প্রায়)

অতএব গরুটি A-র এক পার্শ্বে প্রায় 13 মিটার পর্যন্ত খেতে পারবে। তাহলে A-র উভয় পার্শ্বে মোট প্রায় 13×2 বা 26 মিটার খেতে পারবে।

উদাহরণ 5. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 10, 14 ও 16 সেমি. ঐ ত্রিভুজের দীর্ঘতম বাহুর উপর অঙ্কিত উচ্চতা কত।

ত্রিভুজের বাহু তিনটি a, b, c ধরা যাক।

$a = 10$ সেমি, $b = 14$ সেমি, $c = 16$ সেমি.।

তাহলে অর্ধপরিসীমা $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+14+16}{2} = 20$ সেমি.।

অতএব ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{20(20-10)(20-14)(20-16)}$

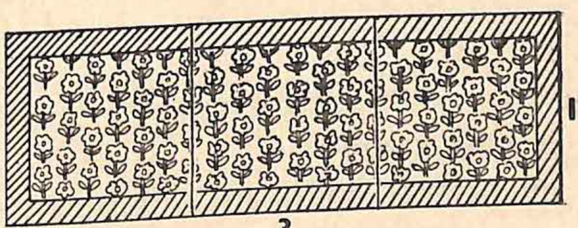
$= \sqrt{20 \times 10 \times 6 \times 4} = 10 \times 2 \times 2\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$ বর্গ সেমি.

ত্রিভুজটির দীর্ঘতম বাহু c ($=16$ সেমি) ; ঐ বাহুর উপর উচ্চতা h দিয়ে সূচীত হলে

$\frac{1}{2} \times 16 \times h =$ ক্ষেত্রফল $= 40\sqrt{3}$

$\therefore \quad h = 5\sqrt{3}$ সেমি। (উত্তর)

উদাহরণ 6. একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ। তার ক্ষেত্রফল 21675 বর্গমিটার। ঐ বাগানের ভেতরে বাইরের বেড়ার গা ঘেঁসে 1 মিটার চওড়া একটি রাস্তা তৈরী করতে হবে। প্রতি 10 বর্গমিটার বা তার কোন ভগ্নাংশের জন্য খরচ 22 টাকা হলে সমস্ত রাস্তাটির জন্য কত খরচ পড়বে ?



প্রস্থের সমান্তরাল দুটি রেখা টেনে সমস্ত বাগানটিকে তিনটি সমান বর্গক্ষেত্রে ভাগ করা যায়। এই বর্গক্ষেত্রগুলির প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফল হবে

$21675 \div 3$ বা 7225 বর্গমিটার।

এই বর্গক্ষেত্রের এক একটি বাহু তাহলে

$\sqrt{7225}$ মিটার

$\therefore \sqrt{5 \times 5 \times 17 \times 17}$ বা 85 মিটার।

এটিই রাস্তাসহ সমস্ত বাগানটির প্রস্থ। তাহলে সমস্ত বাগানটির প্রস্থ 85 মিটার এবং দৈর্ঘ্য 85×3 বা 255 মিটার। বাগানটির মোট দৈর্ঘ্য থেকে প্রত্যেক প্রান্তে রাস্তার চওড়া 1 মিটার করে দুপ্রান্তে মোট 2 মিটার বাদ দিলে রাস্তা বাদে বাগানটির দৈর্ঘ্য পাওয়া যাবে। তার প্রস্থও একইভাবে পাওয়া যাবে। এভাবে রাস্তা বাদে বাগানটির দৈর্ঘ্য হল $255-2$ বা 253 মিটার এবং প্রস্থ হল $85-2$ বা 83 মিটার। অতএব রাস্তাবাদে বাগানটির ক্ষেত্রফল

$=253 \times 83$

$=20999$ বর্গমিটার।

$$\begin{array}{r} 253 \\ \times 83 \\ \hline 759 \\ 2024 \\ \hline 20999 \end{array}$$

অতএব রাস্তার ক্ষেত্রফল

=(রাস্তাসহ সমগ্র বাগানের ক্ষেত্রফল)−(রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল)

$=21675-20999$

$=676$ বর্গমিটার

তাহলে মোট 680 বর্গমিটার রাস্তা তৈরীর খরচ পড়বে। অতএব খরচ

$=22 \times 68$

$=1496$ টাকা। (উত্তর)

$$\begin{array}{r} 68 \\ 22 \\ \hline 136 \\ 136 \\ \hline 1496 \end{array}$$

উদাহরণ 7. একটি আয়তক্ষেত্র ও একটি বর্গক্ষেত্র উভয়েরই পরিসীমা সমান। কোন্ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বেশী?

ধরা যাক, বর্গক্ষেত্রটির প্রত্যেকটি বাহু a। তাহলে তার পরিসীমা হয় $4a$। অতএব আয়তটিরও পরিসীমা $4a$। তাহলে আয়তটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ

ধরা যাক যথাক্রমে $a+x$ ও $a-x$ (x ধনাত্মক) কেননা তাতে পরিসীমা $4a$ ঠিক থাকে। এখন

বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=a\times a=a^2$

এবং আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=(a+x)\times(a-x)=a^2-x^2$ ।

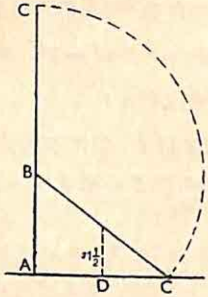
যেহেতু $a^2>a^2-x^2$, অতএব বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল অপেক্ষা বেশী।

মন্তব্য। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অন্তর $(=2x)$ যত বাড়বে তার ক্ষেত্রফল তত কমবে।

§ 12. প্রশ্নমালা

1. একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 15 সেমি. ও 20 সেমি. হলে তার অতিভুজ ও কালি কত ?
2. একটি দেওয়ালের গায়ে 5 মিটার দীর্ঘ একটি মই ঠেকান আছে। মইয়ের শীর্ষ দেওয়ালের শীর্ষ থেকে 2 মিটার নিচে আছে। মইয়ের নিম্নপ্রান্ত দেওয়াল থেকে 3 মিটার দূরে আছে। দেওয়ালটি কত উচ্চ ?
3. যে সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু 5 সেমি. ও অপর বাহু 6 সেমি. তার অতিভুজ কত ?
4. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 6 সেমি. ও 8 সেমি.। আয়তক্ষেত্রটির প্রত্যেকটি কর্ণ ও ক্ষেত্রফল কত ? আয়তটির পরিসীমা কত ?
5. কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণ $3\sqrt{2}$ ডেসি মি. হলে তার এক একটি বাহু ও ক্ষেত্রফল কত ?
6. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 10 মি. এবং একটি বাহু 8 মি.। ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য কত ? ত্রিভুজটির কালি কত ?
7. একটি সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $114\sqrt{3}$ মিমি.। তার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল কত ?
8. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে 8, 10 ও 14 সেমি.। তার ক্ষেত্রফল কত ?
9. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত 3 : 4 : 5। তার পরিসীমা 32 সেমি হলে ক্ষেত্রফল কত ? ঐ ত্রিভুজের দীর্ঘতম বাহুর উপর অঙ্কিত উচ্চতা কত ?

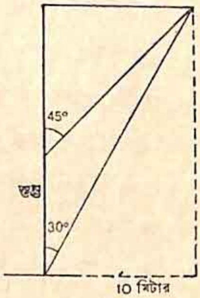
10. ABC একটি সরল গাছ মাটির উপর A-তে খাড়াভাবে দাঁড়িয়ে আছে। গাছটি B-তে দুর্বল থাকার জন্য ঝড়ে ঐখানে ভেঙ্গে গেল। কিন্তু উপর অংশ সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে বাকী অংশের সঙ্গে লেগে রইল। C শীর্ষ মাটির সঙ্গে C-তে ঠেকল। ভেঙ্গে যাওয়ার আগে গাছটি মোট কত দীর্ঘ ছিল জানবার দরকার হল। B যথেষ্ট উঁচুতে থাকায় AB বা BC-র মাপ নেওয়া তত সহজ নয়। ADC-র মাপ নেওয়া হল 4 মিটার।



ADC-র মধ্যবিন্দু D থেকে ওর ঠিক উপর দিকে গাছটির ভেঙ্গে পড়ে থাকা অংশ পর্যন্ত মাপ হল $1\frac{1}{2}$ মিটার। তাহলে সমস্ত গাছটি কত লম্বা ছিল ? [উঃ 8 মিটার]

11. একটি জলাশয়ে জলতলের $\frac{1}{4}$ মিটার উপরে একটি পদ্মফুল আছে। হাওয়ায় ঐ পদ্মফুল কিছুটা সরে গিয়ে জলের সঙ্গে মিশল। এর ডাঁটা আগে যেখানে জলতল ভেদ করেছিল ফুলটি সেখান থেকে 1 মিটার দূরে জলের সঙ্গে মিশল। ফুলটি যেখানে ফুটেছে সেখানে জলের গভীরতা কত ?

12. একটি স্তম্ভের এক জায়গা থেকে গ্যাসভরা একটি বেলুন ছাড়া হল। তখন অল্প হাওয়া ছিল। বেলুনটি স্তম্ভের সঙ্গে 45° কোণ করে একটি সরলরেখায় খুব ধীর গতিতে উড়ে চলল। কিছুদূর গিয়ে সেটি ফেটে গেল। বেলুনের টুকরাগুলো স্তম্ভের পাদদেশ থেকে 10 মিটার দূরে মাটিতে পড়ল। বেলুনটি যখন ফাটে তখন স্তম্ভের গোড়ায় যারা বসেছিল তারা দেখল যে স্তম্ভের সঙ্গে 30° কোণ করে আছে এরূপ একটি রেখায় বেলুনটি আছে। [পাশে ছবি দেখ।]



বেলুনটি স্তম্ভের কত উপর থেকে ছাড়া হয়েছিল।

13. রতন তার একটি 80 মি. $\times$ 45 মি. আয়তাকার জমি অন্য লোকের ঐ পরিমাণ একটি বর্গাকার জমির সঙ্গে বিনিময় করল। রতনের নতুন জমির দৈর্ঘ্য-প্রস্থ কত হবে ?

14. 78 মি. $\times$ 55 মি. একটি বাগানের বাইরে চারদিকে 1 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। ঐ রাস্তার কালি কত ?

15. 1 হেক্টর পরিমাণ একটি বর্গাকার বাগানের মাঝখানে 16 বর্গমিটার পরিমাণ একটি চৌবাচ্চা আছে। এই চৌবাচ্চার কর্ণগুলি বাগানের কর্ণগুলির সঙ্গে একই রেখায়। চৌবাচ্চাকে ঘিরে চারদিকে 1 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। বাগানের যে কোন বাহুর ঠিক মাঝখান থেকে 1 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা খাড়া বেরিয়ে চৌবাচ্চার গায়ের রাস্তার সঙ্গে মিশেছে। বাগানে মোট কতটুকু রাস্তা আছে ?

16. একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য তার প্রস্থের দ্বিগুণ। বাগানটির কালি 18 আর (are)। বাগানের চারধারে বাগানের বেড়ার মধ্যে 1 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। ঐ রাস্তার কালি কত ?

17. একটি হল ঘরের দৈর্ঘ্য 7 মিটার, প্রস্থ 5 মিটার ও উচ্চতা 4 মিটার। ঐ ঘরে 1 মিটার প্রস্থ ও 2 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট তিনটি দরজা ও 1 মিটার প্রস্থ ও $1\frac{1}{4}$ মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট চারটি জানালা আছে। ঐ ঘরের দেওয়াল ও ছাদ নক্সা আঁকা কাগজ দিয়ে মুড়ে দেওয়া হল। দেখা গেল 30টি বর্গাকার কাগজে এ কাজ ঠিক সম্পূর্ণ হল। এক একটি কাগজের দৈর্ঘ্য কত ?

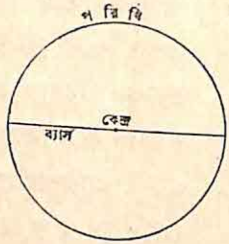
18. 96 ডেকামি. দীর্ঘ একখণ্ড দড়ি দিয়ে সনুটু একটি বর্গাকার জমি ঘিরে নিল বাগান করার জন্য। তার ভাই মনুটু ঐ একই পরিমাণ দীর্ঘ দড়ি দিয়ে একটি আয়তাকার জমি ঘিরল। ওদের বাবা বলেছিলেন ঐ দড়ি দিয়ে ঘিরে যে বড় বাগান করতে পারবে সে-ই বেশী বুদ্ধিমান। বলতো ঐ দু ভাইয়ের মধ্যে কে বেশী বুদ্ধিমান ?

19. প্রমাণ কর যে একই পরিসীমা বিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ও একটি বর্গক্ষেত্রের মধ্যে বর্গক্ষেত্রের কালি বেশী।

20. প্রমাণ কর যে একই পরিসীমা বিশিষ্ট আয়ত সমূহের মধ্যে বর্গক্ষেত্রই সবচেয়ে বড়।

§ 13. বৃত্ত। সংজ্ঞা ও কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয়।

কোন সামতলিক ক্ষেত্র যদি এমন একটি বক্ররেখা দিয়ে ঘেরা হয় যে ঐ ক্ষেত্র মধ্যস্থ একটি বিশেষ বিন্দু থেকে ঐ বক্ররেখায় যে কোন বিন্দু সমদূরবর্তী তবে তাকে **বৃত্ত** (circle) বলা হয়। ক্ষেত্রমধ্যস্থ ঐ বিশেষ বিন্দুটিকে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র (centre) বলা হয়। বৃত্ত যে বক্ররেখা দিয়ে ঘেরা তাকে বৃত্তের **পরিধি** (circumference) বলা হয়। বৃত্তের কেন্দ্রগামী কোন সসীম সরলরেখার প্রান্ত দুটি পরিধিতে অবস্থিত থাকলে ঐ সসীম সরলরেখাকে বৃত্তের **ব্যাস** (diameter) বলা হয়। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে পরিধির যে কোন বিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত সসীম সরলরেখাকে **ব্যাসার্ধ** (radius) বলা হয়। লক্ষ্যণীয় যে বৃত্তের সমস্ত ব্যাস দৈর্ঘ্যে সমান। ব্যাসার্ধ হয় ব্যাসের অর্ধেক। কোন সসীম সরলরেখার প্রান্ত দুটি পরিধির উপর থাকলে ঐ সসীম রেখাকে জ্যা (chord) বলা হয়। লক্ষ্যণীয় যে, ব্যাস হল বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা। কোন জ্যা বৃত্তকে যে দুটি অংশে বিভক্ত করে তাদের প্রত্যেককে **বৃত্তাংশ** (segment) বলা হয়। কোন বৃত্তাংশ একদিকে জ্যা এবং অপরদিকে পরিধির অংশবিশেষ দিয়ে ঘেরা। পরিধির যে কোন অংশকে বৃত্তের একটি চাপ বলা হয়। তাহলে কোন বৃত্তাংশ একটি জ্যা ও একটি চাপ দিয়ে ঘেরা।



বিকল্প সংজ্ঞা। কোন সমতলের কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু থেকে সতত সমান দূরে অবস্থিত থেকে কোন সঞ্চরণশীল বিন্দু যদি ঐ সমতলে সঞ্চরণ করে তবে তার যে সঞ্চারপথ হয় তাকে একটি বৃত্ত বলা হয়। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র এবং কেন্দ্র থেকে সঞ্চরমাণ বিন্দুটির দূরত্বকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলা হয়।

§ 14. বৃত্ত। একটি বিশেষ ধর্ম। পরিধি। ক্ষেত্রফল।

যে কোন বৃত্তের পরিধি ও তার ব্যাসের অনুপাত যদি পরীক্ষা দ্বারা বের করা যায় তবে দেখা যাবে যে ঐ অনুপাত সব বৃত্তের ক্ষেত্রে একই। অর্থাৎ বিভিন্ন ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট (অর্থাৎ ছোট বড় বিভিন্ন আকারের) যতগুলি খুশী বৃত্তের পরিধির মাপ নিয়ে তাদেরকে তাদের নিজ নিজ বৃত্তের ব্যাস

দিয়ে ভাগ করলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে একই ভাগফল (প্রায় 3·14) পাওয়া যাবে। এতো হল পরীক্ষালব্ধ ফল। বস্তুতঃ পক্ষে জ্যামিতিক প্রমাণের সাহায্যে প্রতিষ্ঠিত করা যায় যে,

যে কোন বৃত্তের পরিধি ও তার ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক। অর্থাৎ, সব বৃত্তেরই পরিধি তার ব্যাসের একটি নির্দিষ্ট গুণিতক। এখানে ধ্রুবক বলতে অপরিবর্তনশীল কোন সংখ্যাকে বুঝান হচ্ছে। তাহলে সব বৃত্তের ক্ষেত্রেই $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}$ এর মান একই এবং এ মান সুনির্দিষ্ট। একই ও সুনির্দিষ্ট বটে কিন্তু এ মান কোন সামান্য বা দশমিক ভগ্নাংশের আকারে বের করা সম্ভব নয়।

প্রকৃত মান, যা বের করা যায় না, তাকে π (এটি একটি গ্রীক অক্ষর, উচ্চারণ পাই) প্রতীক দিয়ে সূচিত করা হয়। তাহলে যে কোন বৃত্তের

$$\boxed{\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\pi}$$

এই π এর আসন্ন বা মোটামুটি মান বের করে দেখা গেছে, তা প্রায় $\frac{22}{7}$ বা দশমিক ভগ্নাংশের আকারে 3·14। আরও সূক্ষ্ম (নিকটতর) মান হল 3·14159।

পরিধি ও ব্যাসের মধ্যে উপরিলিখিত সম্পর্কটিকে বিকল্পে এভাবেও লেখা যায় :

$$\text{পরিধি} = \pi \times \text{ব্যাস}$$

বা,
$$\boxed{\text{পরিধি} = 2\pi r},$$

যেখানে r প্রতীক দিয়ে ব্যাসার্ধ সূচিত হচ্ছে।

এই প্রসঙ্গে কোন প্রমাণ না দিয়ে বৃত্তের ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত নিচের সূত্রটি ব্যবহার করা হবে— r বলতে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বুঝতে হবে :

$$\boxed{\text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \pi r^2}$$

মন্তব্য 1°. কোন প্রশ্নের সমাধানে π-এর কোন আসন্ন মানের ব্যবহার একান্তই প্রয়োজন না হলে তা ব্যবহার করা ঠিক নয় (যেমন §15, 11-তে)। কারণ π এর কোন মান ব্যবহার করে কোন সম্পর্ক লিখলে তা সম্পূর্ণরূপে সঠিক সম্পর্ক নাও হতে পারে। π এর মান সাধারণতঃ $\frac{22}{7}$ বা 3·14 নেওয়া

—7

হয়। তবে প্রশ্নে যদি অন্য কোন মান নেওয়ার নির্দেশ থাকে তবে তা নিতে হবে।

মন্তব্য 2°. পরিমিতিতে উত্তর সাধারণতঃ দশমিক ভগ্নাংশের আকারে দেওয়া হয়। কোন প্রশ্নে ভিন্নরূপ কিছু নির্দেশ না থাকলে উত্তর সাধারণতঃ দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ করে দেওয়াই রীতি। তবে ক্ষেত্রবিশেষে এর ব্যতিক্রম হতে পারে। এ প্রসঙ্গে নিচে উদাহরণ 3 এর নিচে দেওয়া মন্তব্যও গুরুত্বপূর্ণ।

§ 15. উদাহরণমালা।

উদাহরণ 1. একটি বৃত্তাকার বাগানের ব্যাসার্ধ 14 মিটার। প্রতি 10 মিটার বেড়া দিতে 3 টাকা হারে খরচ পড়ে। ঐ বাগানের চারদিকে বেড়া দিতে কত খরচ পড়বে? [$\pi = \frac{22}{7}$]

বাগানটির পরিধি $= 2\pi r$

$= 2\pi \times$ ব্যাসার্ধ

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ বা 88 মিটার।

অতএব বাগানটির বেড়ার দৈর্ঘ্য 88 মিটার। তাহলে বেড়া দিতে খরচ পড়বে $\frac{3 \times 88}{10}$ টাকা বা 26·40 টাকা।

উদাহরণ 2. একটি বৃত্তাকার চাকতির ব্যাস 3·5 সেমি। এর ঠিক মধ্যস্থল থেকে 2·1 সেমি ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তাকার অংশ কেটে ফেলে দেওয়া হল। বাকী অংশের ক্ষেত্রফল কত?

মাঝখানটা কেটে ফেলার আগে সমগ্র চাকতির ক্ষেত্রফল

$= \pi \times$ (ব্যাসার্ধ)^2

$= \pi \times \left(\frac{3 \cdot 5}{2}\right)^2$ বর্গ সেমি.।

যে অংশটুকু কেটে ফেলা হল তার ক্ষেত্রফল

$= \pi \times$ (ব্যাসার্ধ)^2

$= \pi \times \left(\frac{2 \cdot 1}{2}\right)^2$ বর্গ সেমি.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\pi\times\left(\frac{3\cdot5}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{2\cdot1}{2}\right)^2$

$$=\frac{22}{7}\left[\left(\frac{35}{20}\right)^2-\left(\frac{21}{20}\right)^2\right]$$

$$=22\times7\times\left[\left(\frac{5}{20}\right)^2-\left(\frac{3}{20}\right)^2\right]$$

$$=22\times7\times\left(\frac{5}{20}+\frac{3}{20}\right)\times\left(\frac{5}{20}-\frac{3}{20}\right)$$

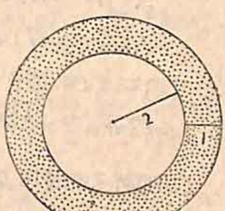
$$=22\times7\times\frac{8}{20}\times\frac{2}{20}=\frac{22\times7\times4}{10\times10}=\frac{88\times7}{100}$$

$=6\cdot16$ বর্গ সেমি.। (উত্তর)

উদাহরণ 3. 2 মিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি জলাধারের বাইরে চারদিকে 1 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। ঐ রাস্তার কালি কত ?

রাস্তাসহ জলাধারের উপর তল বৃত্তাকার এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ $2+1$ বা 3 মিটার। অতএব রাস্তাসহ জলাধার অংশটুকুর ক্ষেত্রফল

$=\pi\times3^2=9\pi$ বর্গ মিটার।



রাস্তা বাদে জলাধার অংশের ক্ষেত্রফল

$=\pi\times2^2=4\pi$ বর্গ মিটার।

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল $=9\pi-4\pi=5\pi$

$=5\times3\cdot14=15\cdot70$ বর্গ মিটার (প্রায়)। (উত্তর)

মন্তব্য। প্রায় 15·70 বর্গ মিটার ও প্রায় 15·7 বর্গ মিটার লেখা দুটিতে কিছুটা তফাৎ আছে। প্রথমটিতে দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত এবং দ্বিতীয়টিতে মাত্র এক দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান বলে দেওয়া হচ্ছে। দ্বিতীয়টিতে দশমিকের পর শতাংশের অঙ্ক কত তা বলা নেই। অর্থাৎ এই অঙ্ক 0, 1, 2, 3, 4 এর যে কোনটি হতে পারে। কিন্তু প্রথমটিতে দশমিকের শতাংশও নির্দিষ্ট হয়ে আছে। তাহলে যদিও দুটি মানই আসন্ন মান, তবুও প্রথমটি প্রকৃত মানের অধিকতর নিকট পর্যন্ত শুদ্ধ মান বুঝাচ্ছে। তাই প্রথম মানই বেশী শুদ্ধ ও ভাল।

উদাহরণ 4. একটি ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা 3 সেমি. দীর্ঘ। 20 ঘন্টায় ঘন্টার কাঁটার প্রান্তটি কত পথ অতিক্রম করবে।

কাঁটার প্রান্ত বিন্দুটি ডায়ালের কেন্দ্রকে কেন্দ্র করে 3 সেমি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে ঘুরে। এই বৃত্তের পরিধি হল $2\pi\times$ব্যাসার্ধ বা 6π সেমি.। কাঁটার প্রান্ত বিন্দুটি প্রতি 12 ঘন্টায় সমগ্র পরিধি একবার অতিক্রম করে অর্থাৎ 6π সেমি. পথ যায়। অতএব তা 20 ঘন্টায়

$$\frac{6\pi}{12}\times 20=\frac{6}{12}\times 3{\cdot}14\times 20=31{\cdot}4$$ সেমি. পথ অতিক্রম করে।

$\therefore$ উত্তর $=31{\cdot}4$ সেমি.।

উদাহরণ 5. 154 বর্গ ডেকামি. কালি বিশিষ্ট বৃত্তাকার ক্ষেত্র আবদ্ধ করতে যতটা দড়ি লাগে ঐ দড়ি দিয়ে কতটা বর্গাকার ক্ষেত্র আবদ্ধ করা যায়? [দেওয়া আছে, $\pi=$প্রায় $\frac{22}{7}$।]

ধরা যাক, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $=r$। তাহলে তার কালি

$=\pi r^2=\frac{22}{7}r^2=154$ বর্গ ডেকামি।

$\therefore\ r^2=154\times\frac{7}{22}=7\times 7$ বর্গ ডেকামি।

$\therefore\ r=7$ ডেকামি।

$\therefore$ বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির পরিধি

$=2\pi r=2\times\frac{22}{7}\times 7$ বা 44 ডেকামি।

তাহলে বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি আবদ্ধ করতে 44 ডেকামি দীর্ঘ দড়ি লাগে। ঐ দড়ি দিয়ে যে বর্গাকার ক্ষেত্র আবদ্ধ করা যায় তার এক একটি বাহু ধরা যাক a। তা হলে তার পরিসীমা হয় $4a$। এই পরিসীমা দড়িটির দৈর্ঘ্যের সমান।

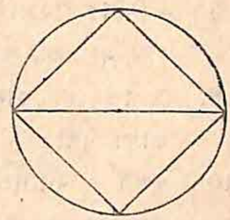
$\therefore\ 4a=44$ ডেকামি।

$\therefore\ a=11$ ডেকামি।

অতএব বর্গাকার ক্ষেত্রটির নির্ণেয় কালি

$=a^2=11\times 11$ বা 11×11 বা 121 বর্গ ডেকামি। (উত্তর)

উদাহরণ 6. $2\pi a$ পরিধি বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার তামার পাত থেকে কেটে কত বড় বর্গাকার পাত পাওয়া যেতে পারে?



যেহেতু বৃত্তাকার পাতটির পরিধি $2\pi a$, অতএব তার ব্যাস হবে $2a$। ঐ বৃত্তের মধ্যে অঙ্কিত সর্বাপেক্ষা বড় বর্গক্ষেত্রের কর্ণ হবে বৃত্তটির একটি ব্যাস। তাহলে বর্গক্ষেত্রটির কর্ণ হবে $2a$। সুতরাং বর্গক্ষেত্রটির এক একটি বাহু যদি x হয় তবে

$$x^2+x^2=(2a)^2$$

বা, $$2x^2=4a^2 \text{।}$$

$$\therefore \quad x^2=2a^2 \text{।}$$

অতএব এই বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে $(x^2=)\ 2a^2$। অর্থাৎ বৃত্তাকার পাতটি থেকে সবচেয়ে বড় $2a^2$ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গাকার পাত পাওয়া যেতে পারে।

§ 16 প্রশ্নমালা।

1. একটি বৃত্তাকার চাকার ব্যাস 3 মিটার হলে তার পরিধি কত ? ($\pi=3{\cdot}14$)
2. একটি গাড়ির একটি চাকার ব্যাস 1·4 মিটার। গাড়িটি 1·32 কিলোমিটার পথ গেলে ঐ চাকা কতবার ঘুরবে ?
3. একটি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অন্তর 45 সেমি. হলে ঐ বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত ?
4. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও পরিধির অনুপাত 5 বর্গমিটার : 2 মিটার হলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত ?
5. একটি ঘড়ির দুটি কাঁটার দৈর্ঘ্য 4 সেমি. ও 5 সেমি.। যে সময়ে ঘণ্টার কাঁটার প্রান্তটি 4·71 সেমি. পথ অতিক্রম করে সে সময়ে মিনিটের কাঁটার প্রান্তটি কত পথ যাবে ? ($\pi=3{\cdot}14$)
6. একটি বাগানের মাঝখানে 2 মিটার ব্যাস বিশিষ্ট একটি জলাধার আছে। ঐ জলাধারকে ঘিরে 1 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত ?
7. একটি 21 মিটার ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার বাগানের ভিতরে বেড়া ঘেঁসে একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির কালি 198 বর্গমিটার। রাস্তাটি কতটা চওড়া ?

8. 4 মিটার দীর্ঘ দড়ি দিয়ে একটি বর্গাকার ক্ষেত্র ঘিরলে বেশী জায়গা ঘেরা হবে, না একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র ঘিরলে বেশী জায়গা ঘেরা হবে ?

9. দেখাও যে কোন নির্দিষ্ট পরিসীমার বর্গক্ষেত্র ও বৃত্তের মধ্যে বৃত্তের কালি বেশী।

10. একটি r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পাতের একটি ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত বৃত্তাকার অংশটি নেই। অবশিষ্ট ঐ পাতটির ক্ষেত্রফল কত ?

11. r_1 ও r_2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটি বৃত্তাকার পাতের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পাত আছে। এই শেষোক্ত পাতটির ব্যাসার্ধ r হলে দেখাও যে

$$r^2=r_1^2+r_2^2$$

12. 100 মিটার দীর্ঘ কোন দড়ি দিয়ে যতটুকু বর্গাকার ভূমি আবদ্ধ করা যায় তারই সমান কোন বৃত্তাকার ভূমি আবদ্ধ করতে কতটা দড়ি লাগবে ?

13. 22-ক্যারেট সোনার একটি পাতের ওজন প্রতি বর্গ সেমিতে 10 গ্রাম। ঐ পাতের 1 সেমি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার অংশ কেটে নিলে তার মধ্যে কতটুকু খাঁটি সোনা থাকবে ?

[22-ক্যারেট সোনার প্রতি 24 গ্রামে 22 গ্রাম সোনা ও 2 গ্রাম তামা খাদ থাকে।]

14. 144 বর্গমিটার একটি বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর উপর দণ্ডায়মান একটি সমবাহু ত্রিভুজ কেটে নেওয়া হল। অবশিষ্ট ক্ষেত্রটির পরিসীমার সমান পরিধি বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত হয় ?

15. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 154 বর্গ সেমি.। ঐ বৃত্তের মধ্যে কত বড় বর্গক্ষেত্র আঁকা যাবে ?

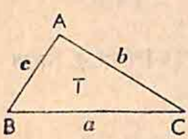
16. একটি বৃত্তের মধ্যে সর্বাপেক্ষা বড় 64 বর্গ সেমি. একটি বর্গক্ষেত্র আঁকা যায়। বৃত্তটির কালি ও পরিধি কত ?

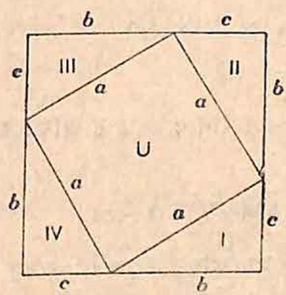
17. দুজন নভশ্চর একটি মহাকাশ যানে বৃত্তাকার পথে পৃথিবী পরিক্রমা করছেন। v দ্রুতিতে (speed) তাঁদের পরিক্রমা চলছে। এক একবার পরিক্রমায় সময় লাগছে T। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a। তাঁরা পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে কত দূরে আছেন ?

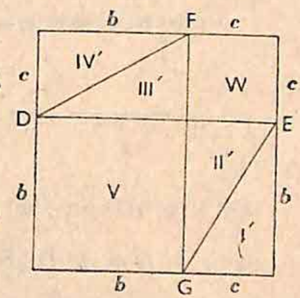
পরিশিষ্ট।

§ A.1 পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিকল্প প্রতিপাদন।

তিনটি বড় কাগজ (একটু পুরু) নাও। এর একটি থেকে যে কোন একটি সমকোণী ত্রিভুজ T কেটে নাও (চিত্র-1)। এর অতিভুজ ধর a এবং বাকী দুটো বাহু b ও c। দ্বিতীয় ও তৃতীয় কাগজ থেকে $b+c$ বাহু বিশিষ্ট দুটি বর্গক্ষেত্র S, S' কেটে নাও। এক কাঁচিতেই এ কাজ হতে পারে। S বর্গক্ষেত্রের এক কোণায় T ত্রিভুজটি বসাও (বর্গক্ষেত্রের বাহুর সঙ্গে ত্রিভুজের বাহুর রেখা মিলিয়ে দিয়ে) এবং কাঁচি চালিয়ে S বর্গক্ষেত্রের কোণা থেকে I ত্রিভুজটি কেটে নাও। এইভাবে চিত্র-2 প্রদর্শিত II, III, IV সমকোণী ত্রিভুজগুলিও কেটে ফেল। এই কোণাগুলো কেটে নিলে যা পড়ে থাকবে তার প্রত্যেকটি







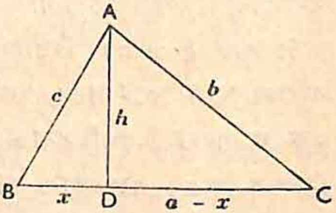
বাহু T ত্রিভুজের a-র সঙ্গে সমান এবং এর প্রত্যেকটি কোণ যে সমকোণ তা T ত্রিভুজের $\angle A$ কোণের সঙ্গে মিলিয়ে দেখে নিলেই বুঝা যাবে। তা হলে এই অবশেষটুকু a-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র U।

তারপর S' বর্গক্ষেত্রের দুটি সন্নিহিত বাহুর সমান্তরাল দুটি সরলরেখা DE, FG টান (চিত্র-3); এরা যেন ঐ দুটি বাহু থেকে b, b দূরে থাকে। (এর জন্য কোন কম্পাস লাগবে না। T ত্রিভুজের b বাহুর সাহায্যে দৈর্ঘ্যের মাপ নিয়ে এ কাজ করা যায়।) এর ফলে b ও c এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র V ও W পাওয়া যাবে। অন্য দুটি হবে আয়তক্ষেত্র। আয়তক্ষেত্র দুটির কর্ণ বরাবর দুটি রেখা টেনে I', II', III', IV' ত্রিভুজ চারটি আঁক।

এখন *I, II, III, IV* ত্রিভুজগুলি এনে *I', II', III' IV'* উপর বসাও। ঠিক ঠিক বসালে এগুলো সর্বতোভাবে মিলে যাবে। অতএব *S* বর্গক্ষেত্র থেকে *I, II, III, IV* বাদ দিয়ে প্রাপ্ত U এবং সমান বর্গক্ষেত্র *S'* থেকে সমান অংশ *I', II', III', IV'* বাদ দিয়ে প্রাপ্ত V+W সমান। তা হলে উপরোক্ত পরীক্ষার ফল উপপাদ্যটিকে সমর্থন করে।

§ A.2 পৃষ্ঠা 88, § 10 এর সূত্রের প্রমাণ।

ধরা যাক *ABC* একটি যে কোন ত্রিভুজ। ত্রিভুজটি স্থূলকোণী হলে ধরা যাক $\angle BAC$ কোণটি স্থূলকোণ। ত্রিভুজটির *BC*কে ভূমি ধরা যাক এবং এই ভূমির উপর লম্ব *AD*কে উচ্চতা ধরা



যাক। এই উচ্চতাকে *h* দিয়ে এবং *BC, CA, AB* কে যথাক্রমে *a, b, c* দিয়ে সূচিত করা যাক। তাহলে

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \tfrac{1}{2} \times BC \times AD$$
$$= \tfrac{1}{2}\, a.h$$

[এখন উদ্দেশ্য হল এই *h*-এর মান *a, b, c*-র আকারে প্রকাশ করে নিতে হবে।]

ধরা যাক, $BD = x$; তা হলে $DC = a - x$।

এখন *ABD* ও *ACD* দুটি সমকোণী ত্রিভুজ। এদের অতিভুজ যথাক্রমে *c* ও *b*। প্রথম ত্রিভুজটি থেকে পাওয়া যায়

$$x^2 + h^2 = c^2 \qquad (i)$$

এবং দ্বিতীয়টি থেকে

$$(a-x)^2 + h^2 = b^2$$

বা, $$a^2 - 2ax + x^2 + h^2 = b^2 \qquad (ii)$$

$(i) - (ii)$ করে পাওয়া যায়

$$-a^2 + 2ax = c^2 - b^2$$
$$\therefore \quad 2ax = a^2 - b^2 + c^2$$
$$\therefore \quad x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

এখন (i) থেকে পাওয়া যায়

$$\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2+h^2=c^2$$

$$\therefore\ h^2=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2$$

$$=\frac{4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{(2ac+a^2-b^2+c^2)(2ac-a^2+b^2-c^2)}{4a^2}$$

$$=\frac{\{(a+c)^2-b^2\}\{b^2-(a-c)^2\}}{4a^2}$$

$$=\frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^2}$$

$$\therefore\ 4a^2h^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{4}.2ah$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \quad (iii)$$

যেহেতু, $2s=a+b+c$

$2s-2a=b+c-a,$

$2s-2b=c+a-b,$

$2s-2c=a+b-c,$

অতএব ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{4}\sqrt{2s.(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{16s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

§ **A.**3 প্রশ্ন। পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে, দুটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির অতিভুজ ও একটি বাহু অপরটির অতিভুজ ও একটি বাহুর সমান হলে ত্রিভুজ দুটো সর্বতোভাবে সমান।

প্রমাণ।

ধরা যাক, ABC ও $A'B'C'$ সমকোণী ত্রিভুজ দুটির

$\angle B=\angle B'=1$ সমকোণ,

অতিভুজ $AC=$ অতিভুজ $A'C'$

এবং $AB=A'B'$।

দেখাতে হবে যে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

প্রথম ত্রিভুজে

$$AC^2=AB^2+BC^2$$

$$\therefore \quad BC^2=AC^2-AB^2 ।$$

দ্বিতীয় ত্রিভুজে, অনুরূপে,

$$B'C'^2=A'C'^2-A'B'^2$$

$$=AC^2-AB^2 ।$$ [দেওয়া শর্ত থেকে]

$$\therefore \quad BC^2=B'C'^2 ।$$

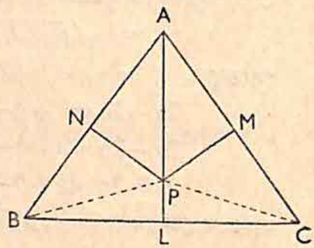
$$\therefore \quad BC=B'C' ।$$

তাহলে ত্রিভুজ দুটির একটির তিনটি বাহু অপরটির তিনটি বাহুর সঙ্গে সমান। অতএব ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

প্রশ্ন। দেখাও যে কোন সমবাহু ত্রিভুজের (equilateral triangle) অভ্যন্তরের যে কোন বিন্দু থেকে বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটির সমষ্টি ঐ বিন্দুটির অবস্থানের উপর নির্ভর করে না।

প্রমাণ।

প্রথম ধাপ।



ধরা যাক ABC যে কোন সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরে P যে কোন একটি বিন্দু। যদি PL, PM, PN যথাক্রমে BC, CA, AB-র উপর লম্ব হয় তাহলে দেখাতে হবে যে $PL+PM+PN$ এর মান P-র অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ ত্রিভুজটির অভ্যন্তরে P যেখানেই নেওয়া হোক না কেন এই সমষ্টির মান একই থাকে।

দ্বিতীয় ধাপ।

PA, PB, PC যোগ করা যাক।

তৃতীয় ধাপ।

সমগ্র ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta ABC=\triangle BPC+\triangle CPA+\triangle APB$$
$$=\tfrac{1}{2}\times BC\times PL+\tfrac{1}{2}\times CA\times PM+\tfrac{1}{2}\, AB.PN$$
$$=\tfrac{1}{2}\times BC\times[PL+PM+PN],$$ [$\because$ ত্রিভুজটি সমবাহু]

$$\therefore\ PL+PM+PN=\frac{2\times \triangle ABC}{BC}$$

$$=\frac{ABC \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ}}{\text{ত্রিভুজের একটি বাহু}}$$

এখানে লব বা হরের মান P-র অবস্থানের উপর নির্ভরশীল নয়। অতএব $PL+PM+PN$ এর মান P-র সব অবস্থানের জন্য একই।

প্রশ্ন। ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু A থেকে BC-র উপর AL লম্ব। দেখাও যে

$$AL^2=BL.CL.$$

[প্রমাণ। সংকেত। $BC^2=AB^2+AC^2=(AL^2+BL^2)+(AL^2+CL^2)$
$=2AL^2+BL^2+CL^2=2AL^2+(BL+CL)^2-2BL.CL$
$=2AL^2+BC^2-2BL.CL$।

$$\therefore\ 0=2AL^2-2BL.CL,$$

$$\therefore\ AL^2=BL.CL \text{।}$$]

প্রশ্ন। প্রমাণ কর যে রম্বসের অভ্যন্তরের যে কোন বিন্দু থেকে বাহুগুলোর দূরত্বের সমষ্টি ঐ বিন্দুটির অবস্থানের উপর নির্ভর করে না।

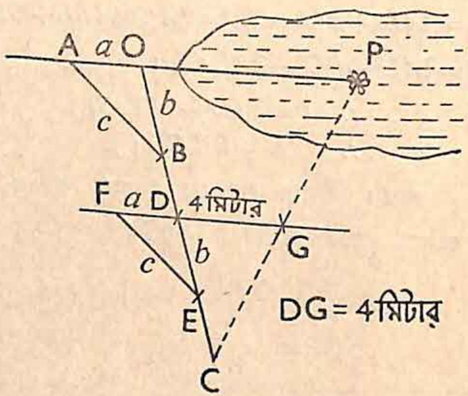
আদর্শ প্রশ্নপত্র 1

A বিভাগ। জ্যামিতি।

4 নং প্রশ্ন ও যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর লিখ।

1. (*a*) ত্রিভুজের যে কোন এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে ভূমির সমান্তরাল কোন সরলরেখা টানলে তার যে অংশ ত্রিভুজের দুটি বাহু দ্বারা ছিন্ন হবে তা দৈর্ঘ্যে ভূমির অর্ধেক—প্রতিষ্ঠিত কর। 7

(*b*) একটি পুকুরে একটি ফুল ফুটে আছে। জলে না নেমে পাড়ের কোন স্থান *O* থেকে ফুলের দূরত্ব কি ভাবে বের করা যাবে? পাশের ছবি দেখে এ প্রশ্নের উত্তর তৈরী কর। 5



(*c*) 6 মিটার উঁচু একটি খুঁটির মাথায় একটি বাতি জ্বলছে। কিছু দূরে 3 মিটার উঁচু আর একটি খুঁটি আছে। মাটিতে এর ছায়ার দৈর্ঘ্য 4 মিটার। খুঁটি দুটির মধ্যে ব্যবধান কত? 3

2. (*a*) একই ভূমির উপর দুটি সমান ত্রিভুজ ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে দুটি শীর্ষ সংযোজক সরলরেখা ভূমির সমান্তরাল।

(*b*) দেখাও যে আয়তের কর্ণ দুটি সমান।

3. (*a*) সমকোণী ত্রিভুজ সংক্রান্ত পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি কি তা বুঝিয়ে বল। উপপাদ্যটির একটি পরীক্ষা-নির্ভর প্রত্যক্ষ প্রমাণ দাও। 2+7

(*b*) ( )-বন্ধনীর মধ্যে দেওয়া শব্দগুলি থেকে ঠিক শব্দটি বেছে নিয়ে নিচের শূন্য স্থানগুলি পূর্ণ কর। 2×3

(*i*) ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি——। (সমান, সমবিন্দু)

(*ii*) ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির যে কোনটি অন্য যে কোনটির ——। (সমদ্বিখণ্ডক, সমত্রিখণ্ডক)

(*iii*) ত্রিভুজের যে কোন মধ্যমা ত্রিভুজটিকে দুটি —— ত্রিভুজে বিভক্ত করে। (সমান, অসমান)

4. 3 সেন্টিমিটার, 4·5 সেন্টিমিটার ও 5 সেন্টিমিটার বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক। এই ত্রিভুজের দীর্ঘতম বাহুর উপর সমান ক্ষেত্রফলের একটি সামান্তরিক আঁক যার একটি কোণ 45°। [চাঁদা ব্যবহার করবে না। অঙ্কনের প্রমাণের প্রয়োজন নেই। কিভাবে আঁকলে তাও বুঝিয়ে বলতে হবে না। আঁকার জন্য যেখানে যা দাগ টানতে হয়েছে তার কোন কিছুই মুছে দেবে না।] 10

B বিভাগ। পরিমিতি। 15

5. (*a*) যে সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহু 10 মিটার তার কালি কত? [দেওয়া আছে, $\sqrt{3}=1{\cdot}732$।] 5

(*b*) এক হেক্টার পরিমিত একটি বর্গাকার বাগানের ভিতরে যথাসম্ভব বড় বৃত্ত একটি আঁকা হয়েছে। বৃত্তের ভিতরটিতে গোলাপের বাগান। এর বাইরে বাগানের চারটি কোণায় রয়েছে রজনীগন্ধা। কতটুকু ক্ষেত্র রজনীগন্ধা লাগান রয়েছে? 5

(*c*) দুজন নভশ্চর একটি মহাকাশ যানে বৃত্তাকার পথে পৃথিবী পরিক্রমা করছেন। v দ্রুতিতে (speed) তাঁদের পরিক্রমা চলছে। এক একবার পরিক্রমনে সময় লাগছে T। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ a। তাঁরা পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে কত দূরে আছেন? 5

আদর্শ প্রশ্নপত্র 2

A বিভাগ। জ্যামিতি। 40

চতুর্থ প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

1. (*a*) সামান্তরিক কাকে বলে? প্রমাণ কর যে সামান্তরিকের দুটি বিপরীত বাহু সমান। 2+6

(*b*) $ABCD$ একটি সামান্তরিক এবং O, AB-র মধ্যবিন্দু। $\angle COD$ একটি সমকোণ হলে দেখাও যে $AB = 2\ BC$। 7

2. (*a*) একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত দুটি সামান্তরিকের কালি সমান—উপপাদ্যটি প্রতিপাদিত কর।

(*b*) দেখাও যে কোন চতুর্ভুজ যদি তার প্রত্যেকটি কর্ণ দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয় তবে ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক।

3. (*a*) প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু। 7

(*b*) মাটির উপর একটি সরলরেখা একটি পাকা বাড়ীর এক পাশে এসে শেষ হয়েছে। ঐ সরলরেখাকে বাড়ীটির অপর পাশে কিভাবে বাড়িয়ে নিয়ে যাওয়া যায় ছবি এঁকে বুঝিয়ে বল। কোন প্রমাণ প্রয়োজন নেই। 4

(*c*) নিচের কথাগুলির কোনগুলি ভুল আর কোনগুলি ঠিক বল। শুধু 'ভুল' বা শুধু 'ঠিক' বলবে। 1×4

(*i*) সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব।

(*ii*) সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলে তার সব ক'টি কোণই সমকোণ হবে।

(*iii*) ত্রিভুজের দীর্ঘতম বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুটির সমষ্টির সমান।

(*iv*) ত্রিভুজের যে কোন মধ্যমা অপর মধ্যমার সমত্রিখণ্ডক।

4. 3 সেন্টিমিটার বাহু বিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজ আঁক। এর সমান কালি বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক। [চাঁদা ব্যবহার করবে না। তোমার অঙ্কনের যথার্থতা প্রমাণ করতে হবে না। কিভাবে আঁকলে তাও বুঝিয়ে বলতে হবে না। তবে অঙ্কনের কোন পেন্সিল-দাগ মুছবে না।] 10

B বিভাগ। পরিমিতি। 15

5. (*a*) যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে 5 সেমি., 6 সেমি. ও 7 সেমি.। তার কালি দু' দশমিক স্থান পর্যন্ত বের কর। 7

(*b*) 2 মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের কেন্দ্রস্থল থেকে 1 মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত বাদ দেওয়া হয়েছে। বাকী অংশের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র আঁকলে তার এক একটি বাহু কত দীর্ঘ হবে? [$\pi = 3{\cdot}142$] 8

উত্তরমালা

§ 12. পৃষ্ঠা 93

1. 25 সেমি., 150 বর্গ সেমি. ; 2. 6 মিটার ; 3. 7·81 সেমি. 4. 10 সেমি., 48 বর্গ সেমি., 28 সেমি. ; 5. 3 ডেসি মি., 9 বর্গ ডেসি মি. ; 6. 6 মি., 24 বর্গ মি. ; 7. 684 মিমি., 22512 বর্গ মিমি. ; 8. 39·18 বর্গ সেমি. ; 9. 42·67 বর্গ সেমি., 6·4 সেমি. ; 10. 8 মিটার ; 11. 3·9375 মিটার ; 12. 7·32 মিটার ; 13. দৈর্ঘ্য 60 মিটার, প্রস্থ 60 মিটার ; 14. 270 বর্গমিটার ; 15. 161 বর্গমিটার ; 16. 176 বর্গমিটার ; 17. 2 মিটার ; 18. সন্টু।

§ 16. পৃষ্ঠা 101

1. 9·42 মিটার ; 2. 300 বার ; 3. 346·5 বর্গ সেমি. ; 4. মিটার ; 5. 70·65 সেমি. ; 6. 9·42 বর্গমিটার ; 7. 1·56 মিটার ; 8. বৃত্তাকার ক্ষেত্র ঘিরলে ; 10. $\frac{3}{4}\pi r^2$; 12. 88·60 মিটার ; 13. 28·78 গ্রাম ; 14. 286·36 বর্গমিটার ; 15. 98 বর্গ সেমি. ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ; 16. 100·57 বর্গ সেমি., 35·55 সেমি. ; 17. $\frac{v.T}{2\pi} - a$ ।